

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Universidade Federal de Alfenas – UNIFAL-MG**  
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas - ICSA Campus Avançado de Varginha

**Bruno Germano Martins Paschoal**

Processos Estocásticos: uma releitura aplicada a Integrais e  
Equações Diferenciais Estocásticas

**VARGINHA**  
**2020**

BRUNO GERMANO MARTINS PASCHOAL

Processos Estocásticos: uma releitura aplicada a Integrais e  
Equações Diferenciais Estocásticas

Trabalho de Conclusão de PIEPEX apresentado à Universidade Federal de Alfenas, como parte das exigências do Instituto de Ciências Sociais Aplicadas; em conjunto ao Programa Integrado de Ensino, Pesquisa e Extensão, para conclusão do Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Andrade Velozo

**VARGINHA**  
**2020**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

BRUNO GERMANO MARTINS PASCHOAL

A banca examinadora, abaixo assinada, aprova o Trabalho de Conclusão do Programa Integrado de Ensino, Pesquisa e Extensão (PIEPEX) apresentado como parte dos requisitos para conclusão do curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia pela Universidade Federal de Alfenas.

---

Orientador(a): Prof. Dr. Felipe Andrade  
Veloza  
Universidade Federal de Alfenas

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Adriele Aparecida Pereira  
  
Universidade Federal de Alfenas

---

Prof. Dr. Manoel Vítor de Souza Veloso  
  
Universidade Federal de Alfenas

**VARGINHA**  
**2020**

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma releitura das ferramentas até então discutidas dos trabalhos de processos estocástico, e utilizá-las para o foco de equações diferenciais estocásticas e integrais estocásticas.

Serão apresentados e descritos os processos estocásticos de movimento browniano e ruído branco, e estudar-se-á integrais estocásticas bem como equações diferenciais estocásticas, sendo exploradas matematicamente através deste trabalho.

Serão abordados da parte de Integrais Estocásticas aquelas de Itô e de Stratonovich, bem como as diferenças entre elas, inclusive graficamente.

É abordado uma modelagem típica de economia, chamada Black-Scholes (ou ainda Black-Scholes-Merton) por meio de equação diferencial estocástica

**Palavras-chave:** Processo Estocástico. Equações Diferenciais Estocásticas. Integrais Estocásticas. Movimento Browniano. Ruído Branco. Black-Scholes. Black-Scholes-Merton.

## ABSTRACT

This paper's aim is to present a rereading on the resources so far shown on the stochastic processes works, and arrange them for stochastic differential equations problems as well for as stochastic integrals.

It shall be presented and described the stochastic processes of the brownian motion, as well as the white noise. Also, it shall be studied stochastic integrals, and also stochastic differential equations, being explored mathematically throughout this paper. It will be presented the Itô and Stratonovich Stochastic Integrals, as well it shall be explored the differences between them. It will be presented also a usual economics model, called Black-Scholes (also known as Black-Scholes-Merton) by the means of the stochastic differential equation.

**Keywords:** Stochastic Process. Differential Stochastic Equations. Stochastic Integrals. Brownian Motion. White noise. Black-Scholes. Black-Scholes-Merton.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Desenvolvimento</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Movimento Browniano e ruído branco</b>	<b>9</b>
3.1	Motivação . . . . .	9
3.2	Passeio aleatório . . . . .	11
3.3	Definição e propriedades elementares . . . . .	12
3.3.1	Definição de movimento Browniano . . . . .	12
3.3.2	Funções de probabilidade de um processo de Wiener $W_t$ . . . . .	13
3.3.3	Valor esperado de um processo de Wiener $W_t$ . . . . .	15
3.3.4	Valores esperados do ruído branco $\xi$ . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Integral estocástica</b>	<b>18</b>
4.1	Soma de Riemann . . . . .	18
4.2	Exemplos . . . . .	20
4.2.1	A integral na forma $\int(1)dW$ . . . . .	20
4.2.2	A integral na forma $\int(W)dW$ . . . . .	20
4.2.2.1	Integral de Stratonovich (soma de Riemann) . . . . .	23
4.2.2.2	Integral de Itô (soma de Riemann) . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Equações diferenciais estocásticas</b>	<b>25</b>
5.1	Introdução . . . . .	25
5.1.1	Um exemplo do modelo de Black-Scholes) $dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW_t$ e $S(0) = s_0$ . . . . .	26
5.2	Equações diferenciais estocásticas lineares . . . . .	26
5.2.1	Terminologia . . . . .	26
5.2.2	Equação diferencial estocástica linear . . . . .	27
5.2.3	Equação diferencial estocástica linear homogênea . . . . .	27
5.2.4	Equação diferencial estocástica linear no sentido estrito . . . . .	27
5.2.5	Solução da Equação diferencial estocástica linear no sentido estrito (caso em que $b_1(t)$ é constante) . . . . .	27
5.2.6	Solução da Equação diferencial estocástica linear no sentido estrito (caso em que $b_1(t)$ não é necessariamente constante) . . . . .	28
5.2.7	Solução da Equação diferencial estocástica linear . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>30</b>

## 1.0 Introdução

Historicamente, o entendimento dos processos estocásticos tem um início acadêmico a partir de Wiener, que escreveu e postulou sobre o chamado movimento browniano, que portanto ficou também conhecido como processo de Wiener (BRUSH, 1968, p. 1-2) para o caso específico do movimento browniano unidimensional. Esse movimento teve seu nome por conta do botânico Robert Brown, que estudava acerca dos movimentos do pólen na água, com publicações por volta dos anos 1828 e 1829.

A interpretação de Robert Brown acerca da aleatoriedade dos movimentos do pólen na água era de que as "moléculas" (termo usado até então para se referir a pequenas partes vivas de seres vivos) eram como animais, e moviam-se independentemente como tal.

Christian Wiener, em 1863, após cerca de 30 anos de poucas publicações acerca do assunto, resolveu categorizar com rigor matemático do que interpretava, a princípio, como movimentos de fluídos internos no pólen. (BRUSH, 1968, p.6-8) Algumas de suas interpretações, como de que esses movimentos se dava pela ação do comprimento da luz vermelha e do calor, foram geralmente rejeitadas, mas é creditado a Wiener, por escritores posteriores, como o primeiro autor a entender tais aleatoriedades serem causadas por movimentos do próprio pólen (que não fossem de origem animal, i.e., por serem vivas) (PERRIN apud BRUSH, 1909, p. 6-8).

Esses foram os primeiros passos do processo de tornar o modelo com aspectos rigorosos matemáticos, conforme evidenciado pela citação de Perrin acima, contemporâneo à época. Após isso, cerca de 1900, Bachelier usou a teoria Browniana para descrever movimentos especulativos na bolsa de Paris, na França (BRUSH, 1968, p. 13) que publicou um estudo dedicado a Poincaré, que era um dos examinadores. Esse estudo não foi bem recebido pelos seus contemporâneos franceses, mas que deve ser entendido como um dos primeiros usos da matemática probabilística de Cardano, Pascal e Fermat com sucesso para especulações de preços e ações, assim como da matemática financeira (WEATHERALL, 2013, p. 10). Mais posteriormente, por volta de 1905, Albert Einstein usou a teoria do movimento Browniano, com base de duas fórmulas físicas. Segundo Stephen G. Brush (A History of Random Processes: I. Brownian Movement from Brown to Perrin, 1968), que afirma "A teoria de Einstein sobre o movimento browniano combinou dois postulados que aparentemente não guardavam correlação entre si (talvez isso fosse uma característica de Einstein). Ele usou a fórmula de hidrodinâmica para a força de uma esfera se movimentando por um fluído viscoso, e outra fórmula, da teoria de soluções, para a

pressão osmótica de moléculas dissolvidas.”, e posteriormente: ”Smoluchowski, pouco tempo depois, publicou uma derivação mais compreensiva de um resultado similar, usando um modelo teórico emprestado da teoria dos gases.”.

A partir de 1920, o processo de Wiener é estudado com rigor matemático, tendo esses dois últimos eventos acadêmicos como ápices do uso dessas teorias até então, tendo como partida os estudos de Norbert Wiener (não ser confundindo com Christian Wiener, citado mais cedo nesta introdução). Esse processo será apresentado com maior cautela mais tarde nesta monografia.

Algo que deve ser notado entretanto é que mesmo após o rigor matemático introduzido por Wiener, há problemas de notação e mesmo falta de materiais disponíveis para o estudo dessa disciplina, como afirmado por J. L. Doob tão tarde quanto 1953, que no seu livro compila (*Stochastic Processes*, 1953), ”A teoria de processos estocásticos evoluiu tanto nos últimos vinte anos que a necessidade de haver uma compilação sistemática do assunto foi profundamente sentido por estudantes de probabilidade, e o livro presente tenta relizar tal necessidade”. Posteriormente, ainda afirma (*ibidem*) que ”Ainda que fosse absurdo escrever um livro sobre processo estocástico que não pressuponha um cenário anterior considerável [para o estudo] em probabilidade da parte do leitor, não há, infelizmente, sequer um texto em que se possa usar como uma referência padrão.”.

Será nesses pilares que este trabalho se apresentará, com um novo foco entretanto: nas integrais e equações diferenciais estocásticas. Tal como foi a dificuldade de Doob em encontrar processos estocásticos, é em similar dificuldade encontrá-los com a ênfase que se buscará neste trabalho. Isso é, este artigo tentará apresentar ao leitor, com notação padronizada, e organizará ao assunto, de maneira que estudos futuros sobre o assunto se torne claro. Também, é de interesse desse trabalho, apresentar graficamente e logicamente o que significam as integrais estocásticas aplicadas em um passeio aleatório, a bem do exemplo. Finalmente, na seção de Equações Diferenciais Estocásticas será apresentado o modelo Black-Scholes (ou ainda chamado Black-Scholes-Merton) a fim de ser interpretado e resolvido na ótica dos processos estocásticos.



## 2.0 Desenvolvimento

Começar-se-á por motivar o movimento Browniano, através de uma equação integral envolvendo a densidade de probabilidade, que descreve a difusão de uma gota de tinta em um líquido (seção 3.1). Depois será definido o movimento Browniano para um caso discreto, na qual o movimento se dá num tempo discretizado e somente com 2 valores possíveis (seção 3.2).

Também serão analisadas as propriedades do movimento Browniano, e será definida a função de probabilidade associada a ele e encontraremos a probabilidade condicional, a probabilidade conjunta, a média, a variância e a covariância (seção 3.3).

Após explorado o movimento Browniano, partir-se-á para definir a integral estocástica, partindo do conceito de soma de Riemann para uma partição gerada por um caminho amostral.

Por último será explorado algumas equações diferenciais estocásticas, usando a integração estocástica para resolvê-las.

### 3.0 Movimento Browniano e ruído branco

Um dos primeiros contatos com o que se entende, historicamente com algum rigor científico, de movimentos brownianos tem sua origem no poeta romano Lucrécio, ou Titus Lucretius Carus, em descrever, a fim de provar a existência do que se entendia de átomos, partículas de poeira, que as descrevia como "dançantes"(LUCRÉCIO APUD TABOR, 1991, p. 120). Já por volta de 1827, conforme foi dito anteriormente, Robert Brown, botânico inglês, quando estudava pólen na água, descreveu esses movimentos academicamente. Depois disso, autores como Einstein e Perrin traduziram matematicamente tal movimento, conforme dito na introdução.

#### 3.1 Motivação

A densidade de probabilidade de uma partícula de tinta se mover de  $x$  a  $x+\xi$ , num tempo (pequeno)  $\tau$ , é dado por  $p_0(\xi;\tau)$ , então a densidade de probabilidade de uma partícula se mover de 0 a  $x$ , será dada (conforme EVANS, 2013, p. 37-38) por

$$p(x;t+\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}(p(x-\xi;t)\cdot p_0(\xi;\tau))d\xi \quad (3.1)$$

em que pode se observar que foi utilizada a convolução (fórmula da distribuição da soma de variáveis aleatórias).

Da expressão no integrando, tem-se que:

- $p_0(\xi;\tau)$  é a densidade de probabilidade da partícula se mover  $\xi$  unidades de comprimento em  $\tau$  unidades de tempo.
- $p(x-\xi;t)$  é a densidade de probabilidade da partícula se mover  $x-\xi$  unidades de comprimento em  $t$  unidades de tempo, em que  $p(x-\xi;t)$  independe do ponto de partida da partícula. Isto é, apenas depende de quanto ela se moveu, dessa forma a probabilidade da partícula se mover só é influenciada pelo quanto ela se move, mas não é influenciada do pelo ponto de onde partiu. Essa última propriedade também é por vezes chamada de "falta de memória".
- Quando dois eventos são independentes, escreve-se que a probabilidade conjunta desses é idêntica ao produto das probabilidades de cada uma dos eventos. Assim,  $p(x-\xi;t)\cdot p_0(\xi;\tau)$

representa a densidade de probabilidade de dois eventos independentes: o evento em que a partícula vai de 0 a  $\xi$  em um tempo  $\tau$  e o evento em que a partícula vai de  $\xi$  até  $x$  (ou seja, desloca-se  $x-\xi$ ) num tempo  $t$ . Portanto  $\xi$  é uma posição que a partícula passa depois de sair de 0 e antes de chegar em  $x$ . O produto representa a densidade de probabilidade de sair de 0 e se chegar em  $x$  passando por  $\xi$ .

- A integral representa acima a “soma de todas as probabilidades” que tem seu início em no valor 0 até o valor  $x$ , levando-se em conta todos os valores de  $\xi$

Expandindo  $p(x-\xi;t)$  em uma série de Taylor de  $\xi$ , centrada em 0, truncando em  $\xi^2$ , tem-se

$$p(x;t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{d^k p(x-\xi;t)}{d\xi^k} \Big|_{\xi=0} \cdot \frac{\xi^k}{k!} \right) \cdot p_0(\xi;\tau) \right) d\xi \quad (3.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( p - p' \cdot \xi + \frac{1}{2} \cdot p'' \cdot \xi^2 + O(\xi^3) \right) \cdot p_0(\xi;\tau) \right) d\xi \quad (3.3)$$

$$\approx p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\xi;\tau) d\xi - p' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi \cdot p_0(\xi;\tau)) d\xi + \frac{1}{2} \cdot p'' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 \cdot p_0(\xi;\tau)) d\xi \quad (3.4)$$

sendo que  $p$ ,  $p'$  e  $p''$  tem  $(x;t)$  por argumento e que

$$\frac{dp(x-\xi;t)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \left( \frac{dp(X;t)}{dX} \Big|_{X=x-\xi} \cdot \underbrace{\frac{d(x-\xi)}{d\xi}}_{=-1} \right) \Big|_{\xi=0} = \frac{dp(X;t)}{dX} \Big|_{X=x} \cdot (-1) = \overbrace{\frac{dp(x;t)}{dx}}^{p'} \cdot (-1) \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 p(x-\xi;t)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = \left( \frac{d^2 p(X;t)}{dX^2} \Big|_{X=x-\xi} \cdot \left( \underbrace{\frac{d(x-\xi)}{d\xi}}_{=-1} \right)^2 \right) \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 p(X;t)}{dX^2} \Big|_{X=x} = \overbrace{\frac{d^2 p(x;t)}{dx^2}}^{p''} \quad (3.6)$$

Supondo que  $p_0(\xi;\tau)$  seja uma distribuição simétrica em relação a  $\xi=0$  (portanto seja uma função par:  $p_0(-\xi;\tau)=p_0(\xi;\tau)$ ) e que exista a média, então tem-se que a média pode ser escrita como:

$$\mathcal{E}_0(\xi;\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi \cdot p_0(\xi;\tau)) d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^0 (\xi \cdot p_0(\xi;\tau)) d\xi}_{=-\int_0^{+\infty} (\zeta \cdot p_0(\zeta;\tau)) d\zeta} + \int_0^{+\infty} (\xi \cdot p_0(\xi;\tau)) d\xi = 0 \quad (3.7)$$

Uma segunda suposição que é feita é que exista o valor esperado de  $\xi^2$  e que seja proporcional a  $\tau$ , ou seja,  $\mathcal{E}_0(\xi^2;\tau) = D \cdot \tau$ , em que  $D$  é uma constante real.

Usando essas 2 suposições, tem-se:

$$p(x;t+\tau) \approx p \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\xi;\tau) d\xi}_{=1} - p' \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi \cdot p_0(\xi;\tau)) d\xi}_{=0} + \frac{1}{2} \cdot p'' \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 \cdot p_0(\xi;\tau)) d\xi}_{=D \cdot \tau} \quad (3.8)$$

$$\approx p(x;t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2} \cdot D \cdot \tau \quad (3.9)$$

portanto, tem-se  $\frac{p(x;t+\tau)-p(x;t)}{\tau} \approx \frac{D}{2} \cdot \frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2}$  e aplicando o limite quando  $\tau$  tende a 0, tem-se a equação de difusão

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{p(x;t+\tau)-p(x;t)}{\tau} \right) \approx \frac{D}{2} \cdot \frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial p(x;t)}{\partial t} = \frac{D}{2} \cdot \frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

### 3.2 Passeio aleatório

Considere o reticulado retangular, definido pelo seguinte, conforme apresentado por EVANS (p. 39, 2013):

$$\{(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t); (m \in \mathbb{Z}) \wedge (n \in \mathbb{Z})\}, \quad \Delta x > 0. \quad \Delta t > 0 \quad (3.11)$$

Considera-se uma partícula em  $x=0$  quando  $t=0$ , e para qualquer momento  $t=n \cdot \Delta t$ , qualquer que seja a posição  $x=m \cdot \Delta x$  em que a partícula esteja, a probabilidade de ela ter um acréscimo, ou um decréscimo, de  $\Delta x$  nessa posição, após um acréscimo no tempo de  $\Delta t$ , é de  $\frac{1}{2}$  (seja para o acréscimo ou para o decréscimo):

$$\mathcal{P}(x_m; t_0) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow m=0 \\ 0 & \Leftarrow m \neq 0 \end{cases}, \quad \mathcal{P}(x_m; t_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n) \quad (3.12)$$

qual adota-se a notação  $\mathcal{P}(x=m \cdot \Delta x; t=n \cdot \Delta t) \equiv \mathcal{P}(x_m; t_n)$  que é a probabilidade de se encontrar a partícula na posição  $x=m \cdot \Delta x$  no momento  $t=n \cdot \Delta t$ , sendo que  $x$  é a variável aleatória e  $t$  é o parâmetro. Será adotado também que  $x_m = m \cdot \Delta x$  e  $t_n = n \cdot \Delta t$ , cujo  $x_0=0$  e  $t_0=0$ .

Portanto a variação de probabilidade ao se variar o tempo é dada por:

$$\mathcal{P}(x_m; t_{n+1}) - \mathcal{P}(x_m; t_n) = \left( \frac{\mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) + \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)}{2} \right) - \mathcal{P}(x_m; t_n) \quad (3.13)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) - 2 \cdot \mathcal{P}(x_m; t_n) + \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)) \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) + \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)) \quad (3.15)$$

que ao se multiplicar ambos os membros por  $(\Delta x)^2 / \Delta t$ , tem-se que:

$$(\mathcal{P}(x_m; t_{n+1}) - \mathcal{P}(x_m; t_n)) \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) + \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)) \quad (3.16)$$

$$\frac{\mathcal{P}(x_m; t_{n+1}) - \mathcal{P}(x_m; t_n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) + \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)}{(\Delta x)^2} \quad (3.17)$$

que se indicará uma variação causada pelo incremento no tempo por  $\Delta_t^+$  e, analogamente, para o

incremento na posição, tem-se  $\Delta_x^+$ . Assim se pode reescrever da seguinte forma a fórmula:

$$\frac{\Delta_t^+ \mathcal{P}(x_m; t_n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n) + \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\frac{\mathcal{P}(x_{m+1}; t_n) - \mathcal{P}(x_m; t_n)}{\Delta x} - \frac{\mathcal{P}(x_m; t_n) - \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)}{\Delta x}}{\Delta x} \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\frac{\Delta_x^+ \mathcal{P}(x_m; t_n)}{\Delta x} - \frac{\Delta_x^+ \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta_x^+ \left( \frac{\Delta_x^+ \mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)}{\Delta x} \right)}{\Delta x} \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta_x^+ \left( \frac{\Delta_x^+}{\Delta x} (\mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)) \right)}{\Delta x} \quad (3.20)$$

sendo que  $\Delta_x^+ \mathcal{P}(x; t) = \mathcal{P}(x + \Delta x; t) - \mathcal{P}(x; t)$  e  $\Delta_t^+ \mathcal{P}(x; t) = \mathcal{P}(x; t + \Delta t) - \mathcal{P}(x; t)$ ,  $t_n + \Delta t = t_{n+1}$ ,  $x_m + \Delta x = x_{m+1}$

Se supõe-se que a razão  $(\Delta x)^2 / \Delta t$  é uma constante  $D$ :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)^2 = D \cdot \Delta t \quad (3.21)$$

então, quando  $\Delta t \rightarrow 0$  tem-se que  $\Delta x \rightarrow 0$ , portanto, aplicando o limite em ambos os membros, tem-se que:

$$\underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_t^+ \mathcal{P}(x_m; t_n)}{\Delta t} \right)}_{= \frac{d}{dt} \mathcal{P}(x; t)} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_x^+}{\Delta x} \left( \frac{\Delta_x^+}{\Delta x} (\mathcal{P}(x_{m-1}; t_n)) \right) \right)}_{= \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{P}(x; t)} \quad (3.22)$$

assim, encontra-se de uma outra forma a equação da difusão:

$$\frac{d\mathcal{P}(x; t)}{dt} = \frac{D}{2} \cdot \frac{d^2 \mathcal{P}(x; t)}{dx^2} \quad (3.23)$$

### 3.3 Definição e propriedades elementares

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades do movimento Browniano (ou processo de Wiener), como a sua função de densidade de probabilidade (a conjunta, a marginal e a condicional), sua média, variância e a sua autocovariância.

#### 3.3.1 Definição de movimento Browniano

Um processo estocástico real  $W_t(w)$  é chamado um movimento Browniano (ou processo de Wiener) se (EVANS, 2013):

1.  $W_0(w) = 0$  quase certamente;
2.  $W_{t_k}(w) - W_{t_{k-1}}(w)$  tem distribuição normal:  $p_{W_{t_k} - W_{t_{k-1}}}(w) = p_{\text{Normal}}(w; 0, \sqrt{t_2 - t_1}) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{w^2}{t_k - t_{k-1}}}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (t_k - t_{k-1})}}$ ;
3.  $\forall_k (t_{k-1} < t_k)$  então, para todo  $k$ , tem-se que  $W_{t_k}(w) - W_{t_{k-1}}(w)$  são estocasticamente independentes.

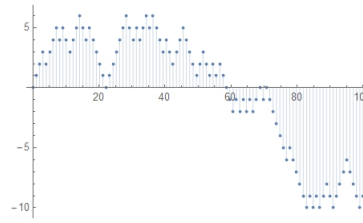


Figura 3.1: Gráfico da amostra de pontos

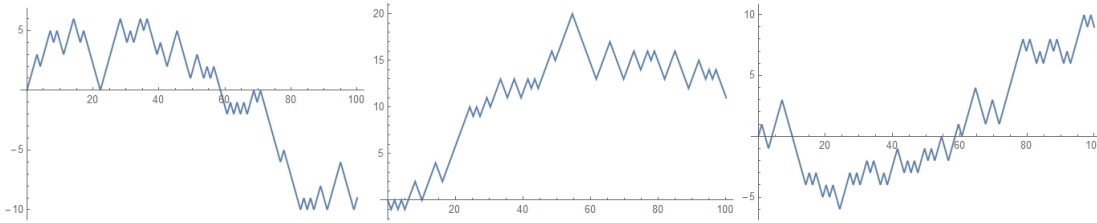


Figura 3.2: Gráficos de alguns caminhos. No primeiro tem-se uma função  $w_t$ , no segundo tem-se uma outra função  $w_t$  e assim sucessivamente.

A variável aleatória  $W_t$  associa elementos  $w$  de  $\Omega$  a valores em  $\mathbb{R}$ . No caso do movimento de uma partícula, tem-se que  $w_t$  é o evento em que a partícula “encontra-se na posição  $w$  do sistema referencial escolhido, no instante de tempo  $t$ ”, e  $W_t(w_t)=w$ , ou seja,  $W_t(w_t)$  é o valor associado a posição (em outros casos, pode ser o preço de algum produto ou o valor de alguma ação de uma empresa). Pode ser visto que o parâmetro  $t$  não altera o valor da variável aleatória  $w$ , contudo o valor de  $t$  é “repassado” à probabilidade. Nas figuras 3.1 e 3.2 são apresentados exemplos gráficos de amostra de pontos, de tal maneira que o supracitado pode ser percebido visualmente.

Pode-se definir que  $W_t(w_t)$  retorna, na verdade, o par de valores  $(w,t)$ , em que a probabilidade  $\mathcal{P}(W_t(w_t)=(w,t))$  é o mesmo que  $\mathcal{P}(W_t=w;t)$  sendo que  $w$  é o valor da variável aleatória (ou seja, é um valor associado à aleatoriedade) enquanto  $t$  é um parâmetro da função de probabilidade  $\mathcal{P}$ , dessa forma tem-se uma família de funções de probabilidade parametrizadas por  $t$ .

Tem-se que  $w_t$  depende de  $t$ , uma vez que é a posição da partícula no tempo  $t$ . A cada função  $w_t$  que se é escolhida no conjunto  $\Omega^{[0;T]}$  (conjunto das funções definidas no intervalo  $[0;T]$  assumindo valores em  $\Omega$ ), e dado um caminho diferente.

### 3.3.2 Funções de probabilidade de um processo de Wiener $W_t$

A densidade de probabilidade para a variável aleatória  $W_t$  é definida (EVANS, 2013, p. 41) como

$$p_{W_t}(w) = p_{\text{Normal}}(w; 0, \sqrt{t}) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{w^2}{t}}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot t}} \quad (3.24)$$

em que  $w$  é o valor da variável aleatória e  $t$  é um parâmetro relacionado com a dispersão

(variância) da densidade de probabilidade. De uma maneira parecida, aplicando os critérios de condicionalidade, a densidade de probabilidade condicional de  $W_{t_2}=w_2$  dado que  $W_{t_1}=w_1$  descreve-se como:

$$p_{W_{t_2};W_{t_1}}(w_2;w_1)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(w_2-w_1)^2}{t_2-t_1}}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(t_2-t_1)}}, \quad t_1 < t_2 \quad (3.25)$$

pode-se observar que a variância é dada por  $(t_2-t_1)$  e a média por  $w_1$ , analogamente ao observado mais acima.

De similar maneira também, aplicando estes critérios, a densidade de probabilidade conjunta define-se como:

$$p_{W_{t_1},W_{t_2}}(w_1,w_2)=p_{W_{t_2};W_{t_1}}(w_2;w_1)\cdot p_{W_{t_1}}(w_1)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(w_2-w_1)^2}{t_2-t_1}}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(t_2-t_1)}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(w_1)^2}{t_1}}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot t_1}} \quad (3.26)$$

Ao que foi previamente estabelecido, quando  $t_1=0$ , tem-se que  $W_{t_1}=0$  com probabilidade 1. Portanto

$$p_{W_0,W_{t_2}}(w_1,w_2)=p_{W_{t_2};W_0}(w_2;w_1)\cdot p_{W_0}(w_1)=p_{W_{t_2};W_0}(w_2;w_1)\cdot\delta(w_1)=p_{W_{t_2};W_0}(w_2;w_1)\cdot\delta(w_1) \quad (3.27)$$

em que  $\delta$  é a função delta de Dirac, que possui as propriedades seguintes

$$\forall_{\varepsilon>0}\left(\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(\delta(x))dx=1\right), \quad \forall_{\varepsilon>0}\left(\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(f(x)\cdot\delta(x-a))dx=f(a)\right) \quad (3.28)$$

sendo assim, aplicando essas propriedades a seguir, abstrai-se que

$$\mathcal{P}(a_1\leq w_1\leq b_1, a_2\leq w_2\leq b_2)=\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}(p_{W_{t_2};W_0}(w_2;w_1)\cdot\delta(w_1))dw_1\right)dw_2 \quad (3.29)$$

$$= \begin{cases} 0 & \Leftarrow \neg(a_1 < 0 < b_1) \\ \int_{a_2}^{b_2}(p_{W_{t_2};W_0}(w_2;0))dw_2 & \Leftarrow a_1 < 0 < b_1 \end{cases} \quad (3.30)$$

e conclui-se que

$$p_{W_0,W_{t_2}}(w_1,w_2)=p_{W_{t_2};W_0}(w_2;w_1)\cdot\delta(w_1)= \begin{cases} 0 & \Leftarrow w_1 \neq 0 \\ p_{W_{t_2};W_0}(w_2;0) & \Leftarrow w_1 = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

ou seja, reescrevendo de forma geral

$$p_{W_0,W_t}(0,w)=p_{W_t;W_0}(w;0)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(w-0)^2}{t-0}}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot(t-0)}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{t}}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot t}}=p_{W_t}(w) \quad (3.32)$$

Reescrevendo a fórmula da probabilidade conjunta, tem-se

$$p_{W_{t_1},W_{t_2}}(w_1,w_2)=p_{W_{t_2};W_{t_1}}(w_2;w_1)\cdot p_{W_{t_1}}(w_1)=p_{W_{t_2};W_{t_1}}(w_2;w_1)\cdot p_{W_{t_1};W_0}(w_1;0), \quad 0 < t_1 < t_2 \quad (3.33)$$

generalizando para  $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , tem-se:

$$p_{W_{t_1},\dots,W_{t_n}}(w_1,\dots,w_n)=p_{W_{t_1};W_0}(w_1;0)\cdot\prod_{k=2}^n(p_{W_{t_k};W_{t_{k-1}}}(w_k;w_{k-1})) \quad (3.34)$$

### 3.3.3 Valor esperado de um processo de Wiener $W_t$

**TEOREMA:** Seja  $W$  um movimento Browniano unidimensional. Então, para todo natural  $n$ , todas as escolhas de tempo  $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n$  e cada função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se:

$$\mathcal{E}(f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (f(w_1, \dots, w_n) \cdot p_{W_{t_1}; W_0}(w_1; 0) \cdot \dots \cdot p_{W_{t_n}; W_{t_{n-1}}}(w_n; w_{n-1})) dw_1 \dots dw_n \quad (3.35)$$

A média do processo de Wiener pode ser obtida conforme abaixo

$$p_{W_t}(w) = p_{\text{Normal}}(w; 0, \sqrt{t}) \quad \therefore \quad \mathcal{E}(W_t) = 0 \quad (3.36)$$

e sua variância por

$$p_{W_t}(w) = p_{\text{Normal}}(w; 0, \sqrt{t}) \quad \therefore \quad \mathcal{V}(W_t) = \mathcal{E}(W_t^2) - \underbrace{(\mathcal{E}(W_t))^2}_{=0} = t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(W_t^2) = t \quad (3.37)$$

De similar maneira à variância acima apresentada, também se pode ter a covariância encontrada conforme abaixo

$$\text{Cov}(W_{t_j}, W_{t_k}) = \mathcal{E}(W_{t_j} \cdot W_{t_k}) - \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_j})}_{=0} \cdot \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_k})}_{=0} = \mathcal{E}(W_{t_j} \cdot W_{t_k}) \quad (3.38)$$

e calculando o valor esperado do produto  $W_{t_j} \cdot W_{t_k}$  (supondo que  $0 \leq t_j \leq t_k$ )

$$\mathcal{E}(W_{t_j} \cdot W_{t_k}) = \mathcal{E}(W_{t_j} \cdot (W_{t_k} - W_{t_j} + W_{t_j})) = \mathcal{E}(W_{t_j} \cdot (W_{t_k} - W_{t_j}) + W_{t_j}^2) \quad (3.39)$$

$$= \mathcal{E}(W_{t_j} \cdot (W_{t_k} - W_{t_j})) + \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_j}^2)}_{=t_j} = \mathcal{E}((W_{t_j} - 0) \cdot (W_{t_k} - W_{t_j})) + t_j \quad (3.40)$$

$$= \mathcal{E}((W_{t_j} - W_0) \cdot (W_{t_k} - W_{t_j})) + t_j \quad (3.41)$$

Uma vez que é considerado que  $0 \leq t_j \leq t_k$ , tem-se das propriedades do processo de Wiener que  $W_{t_j} - W_0$  é estocasticamente independente de  $W_{t_k} - W_{t_j}$ , e se tem também que  $W_{t_j} - W_0$  e  $W_{t_k} - W_{t_j}$  tem média 0, portanto

$$\mathcal{E}(W_{t_j} \cdot W_{t_k}) = \mathcal{E}((W_{t_j} - W_0) \cdot (W_{t_k} - W_{t_j})) + t_j = \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_j} - W_0)}_{=0} \cdot \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_k} - W_{t_j})}_{=0} + t_j = t_j \quad (3.42)$$

Analogamente, se é suposto que  $0 \leq t_k \leq t_j$ , então

$$\mathcal{E}(W_{t_j} \cdot W_{t_k}) = \mathcal{E}(W_{t_k} \cdot (W_{t_j} - W_{t_k} + W_{t_k})) = \mathcal{E}((W_{t_k} - W_0) \cdot (W_{t_j} - W_{t_k})) + t_k \quad (3.43)$$

$$= \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_k} - W_0)}_{=0} \cdot \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_j} - W_{t_k})}_{=0} + t_k = t_k \quad (3.44)$$

portanto, conclui-se que

$$\mathcal{E}(W_{t_j} \cdot W_{t_k}) = \min\{t_j, t_k\} \quad (3.45)$$

e conseqüentemente:

$$\text{Cov}(W_{t_j}, W_{t_k}) = \mathcal{E}(W_{t_j} \cdot W_{t_k}) = \min\{t_j, t_k\} \quad (3.46)$$



**OBSERVAÇÃO:**  $W_{t_2} - W_{t_1}$  e  $W_{t_3} - W_{t_2}$  serão estocasticamente independentes se os intervalos de valores entre  $t_1$  e  $t_2$  não se sobreporem (ou seja, não houver interseção) com o intervalo de valores entre  $t_3$  e  $t_2$ . Uma forma de impedir que haja interseção é fazer com que  $t_1 < t_2 < t_3$  (outra forma seria  $t_3 < t_2 < t_1$ ). Já no caso  $t_1 < t_3 < t_2$  haveria sobreposição dos intervalos.

### 3.3.4 Valores esperados do ruído branco $\xi$

Sabe-se que o ruído branco é definido por

$$\xi_t(w) = \lim_{\tau \searrow 0} \left( \frac{W_{t+\tau}(w) - W_t(w)}{\tau} \right) \quad (3.47)$$

Para que seja calculado  $\mathcal{E}(\xi_t)$ , define-se:

$$\varphi_\tau(t) := \mathcal{E} \left( \frac{W_{t+\tau} - W_t}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \cdot \left( \underbrace{\mathcal{E}(W_{t+\tau})}_{=0} - \underbrace{\mathcal{E}(W_t)}_{=0} \right) = 0 \quad (3.48)$$

portanto, quando  $\tau \rightarrow 0$ , a média continuará a ser 0.

Para se calcular  $\mathcal{E}(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2})$ , ou seja, a autocorrelação, define-se que

$$\phi_\tau(t_1, t_2) := \mathcal{E} \left( \left( \frac{W_{t_1+\tau} - W_{t_1}}{\tau} \right) \cdot \left( \frac{W_{t_2-\tau} - W_{t_2}}{\tau} \right) \right) \quad (3.49)$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \cdot \left( \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_1+\tau} \cdot W_{t_2+\tau})}_{=\min\{t_1+\tau, t_2+\tau\}} - \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_1+\tau} \cdot W_{t_2})}_{=\min\{t_1+\tau, t_2\}} - \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_1} \cdot W_{t_2+\tau})}_{=\min\{t_1, t_2+\tau\}} + \underbrace{\mathcal{E}(W_{t_1} \cdot W_{t_2})}_{=\min\{t_1, t_2\}} \right) \quad (3.50)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\tau^2} \cdot \underbrace{((t_1+\tau) - (t_1+\tau) - t_1 + t_1)}_{=0} & \Leftrightarrow t_1 \leq t_1 + \tau \leq t_2 \leq t_2 + \tau \\ \frac{1}{\tau^2} \cdot \underbrace{((t_1+\tau) - t_2 - t_1 + t_1)}_{=(t_1+\tau) - t_2 \geq 0} & \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \tau \leq t_2 + \tau \\ \frac{1}{\tau^2} \cdot \underbrace{((t_2+\tau) - t_2 - t_1 + t_2)}_{=(t_2+\tau) - t_1 \geq 0} & \Leftrightarrow t_2 \leq t_1 \leq t_2 + \tau \leq t_1 + \tau \\ \frac{1}{\tau^2} \cdot \underbrace{((t_2+\tau) - t_2 - (t_2+\tau) + t_2)}_{=0} & \Leftrightarrow t_2 \leq t_2 + \tau \leq t_1 \leq t_1 + \tau \end{cases} \quad (3.51)$$

$$= \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow t_1 + \tau \leq t_2 \\ \frac{(t_1+\tau) - t_2}{\tau^2} = \frac{-1}{\tau^2} \cdot t_2 + \frac{\tau+t_1}{\tau^2} & \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \tau \\ \frac{(t_2+\tau) - t_1}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2} \cdot t_2 + \frac{\tau-t_1}{\tau^2} & \Leftrightarrow t_1 - \tau \leq t_2 \leq t_1 \\ 0 & \Leftrightarrow t_2 \leq t_1 - \tau \end{cases} \quad (3.52)$$

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \phi_\tau(t_1, t_2) = \frac{\tau}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} \quad (3.53)$$

$$t_2 = t_1 - \tau \Rightarrow \phi_\tau(t_1, t_2) = \frac{0}{\tau^2} = 0 \quad (3.54)$$

$$t_2 = t_1 + \tau \Rightarrow \phi_\tau(t_1, t_2) = \frac{0}{\tau^2} = 0 \quad (3.55)$$

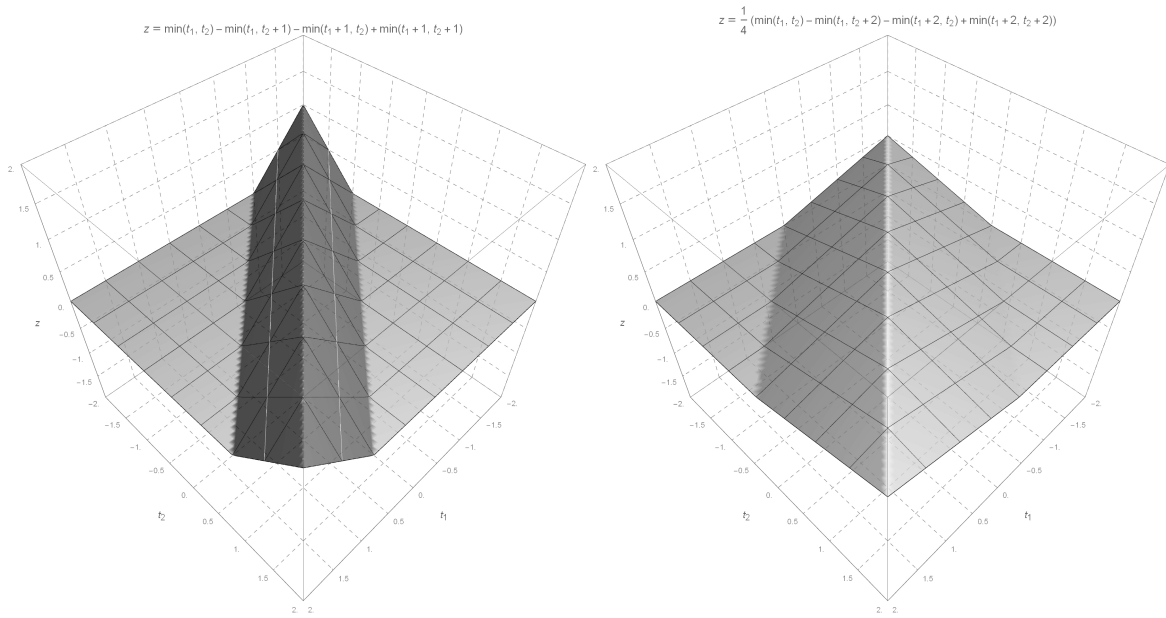


Figura 3.3: Gráfico de  $\frac{\min\{t_1+\tau, t_2+\tau\} - \min\{t_1+\tau, t_2\}}{\tau^2}$  para  $\tau=1$  (à esquerda) e para  $\tau=2$  (à direita)

Lembrando que  $\tau > 0 \Rightarrow t_j < t_j + \tau$ , e que  $t_j \leq t_k \Rightarrow t_j + \tau \leq t_k + \tau$ , sendo  $\{j, k\} = \{1, 2\}$ . Veja figura 3.3

Tem-se que  $\phi_\tau(t_1, t_2) \neq 0$  quando  $t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \tau$  ou quando  $t_1 \leq t_2 + \tau \leq t_1 + \tau$  (ou seja,  $t_1 - \tau \leq t_2 \leq t_1$ ), portanto, quando  $t_1 - \tau \leq t_2 \leq t_1 + \tau$ . Quando  $\tau \rightarrow 0$ , a faixa tende ao conjunto de pontos em que  $t_1 = t_2$  e

$$\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \phi_\tau(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow t_1 \neq t_2 \\ +\infty & \Leftarrow t_1 = t_2 \end{cases} \quad (3.56)$$

tem-se também:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_\tau(t_1, t_2)) dt_2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{t_1-\tau} (0) dt_2}_{=0} + \underbrace{\int_{t_1-\tau}^{t_1} \left(\frac{t_2+\tau-t_1}{\tau^2}\right) dt_2}_{=\frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+\tau} \left(\frac{t_1+\tau-t_2}{\tau^2}\right) dt_2}_{=\frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{t_1+\tau}^{+\infty} (0) dt_2}_{=0} = 1 \quad (3.57)$$

portanto, pode-se concluir que

$$\lim_{\tau \searrow 0} (\phi_\tau(t_1, t_2)) = \delta(t_2 - t_1) \quad (3.58)$$

onde  $\delta(t_2 - t_1)$  é a função delta de Dirac.

Portanto a função de autocorrelação pode ser obtida da seguinte maneira:

$$r(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}) = \underbrace{\mathcal{E}(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2})}_{=\lim_{\tau \searrow 0} (\phi_\tau(t_1, t_2))} - \underbrace{\mathcal{E}(\xi_{t_1})}_{=0} \cdot \underbrace{\mathcal{E}(\xi_{t_2})}_{=0} = \lim_{\tau \searrow 0} (\phi_\tau(t_1, t_2)) = \delta(t_2 - t_1) \quad (3.59)$$

Seja também um processo estocástico  $X_t$ . Se  $\forall_{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2} (\mathcal{E}(X_{t_1}) = \mathcal{E}(X_{t_2}))$  e  $\exists_{c \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}} (\mathcal{E}(X_{t_1} \cdot X_{t_2}) = c(t_2 - t_1))$  então o processo  $X_t$  é chamado estacionário em sentido amplo. Como pode se observar,  $\xi_t$  cumpre essas condições, portanto é estacionário em sentido amplo.

## 4.0 Integral estocástica

Nesta seção iremos apresentar s fundamentos da integral estocástica, visto em (EVANS, 2013, p. 59-73), e contribuiremos apresentando uma interpretação geométrica para as integrais de Itô e de Stratonovich, através da qual apresentaremos uma justificativa para suas diferenças.

### 4.1 Soma de Riemann

Seja o conjunto

$$P_m := \{t_j \in [0; T]; (t_0=0) \wedge (t_m=T) \wedge \forall_{k \in \mathbb{N}_{< m}} (t_k < t_{k+1}) \wedge (j \in \mathbb{N}_{\leq m}) \wedge (m \in \mathbb{N}^*)\} \quad (4.1)$$

denominado partição de  $[0; T]$ , sendo que:

- $m$  é o número de divisões (subintervalos) em que o intervalo  $[0; T]$  será dividido;
- $t_j$  é uma seqüência estritamente crescente qualquer, com  $t_0=0$  e  $t_m=T$ .

Seja a amplitude da partição definida por

$$|P_m| := \max_{j \in \mathbb{N}_{< m}} |t_{j+1} - t_j| \quad (4.2)$$

e a variável  $\tau$  definida por  $\tau_j := t_j + \lambda \cdot (t_{j+1} - t_j)$ ,  $\lambda \in [0; 1]$ ,  $j \in \mathbb{N}_{< m}$ , portanto  $\forall_{\lambda \in [0; 1]} (t_j \leq \tau_j \leq t_{j+1})$ , ou seja,  $\tau_j$  é uma seqüência de valores em que  $\forall_{j \in \mathbb{N}_{< m}} (\tau_j \in [t_j; t_{j+1}])$ .

Para tal partição  $P_m$  e tal seqüência  $\tau_j$ , define-se a soma de Riemann:

$$S(f(W), t, \lambda) := \sum_{k=0}^{m-1} \left( f(W_{\tau_k}(w_{\tau_k})) \cdot \left( \overbrace{W_{t_{k+1}}(w_{t_{k+1}}) - W_{t_k}(w_{t_k})}^{\Delta_k^+(W_{t_k}(w_{t_k})) :=} \right) \right) \quad (4.3)$$

em que:

- $f$  é a função que se deseja integrar (é o integrando), no qual  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  ( $B^A$  é o conjunto de todas as funções  $f$  em que  $f: A \rightarrow B$ );
- $W$  é a variável aleatória em que  $W_t(w) = w$  é o valor real  $w$  associado ao evento  $w$  (o evento pode ser “encontrar o valor  $w$  após realização do experimento”) e o índice  $t$  informa o tempo, apesar de não influenciar no resultado  $w$  (ou seja,  $W$  independe de  $t$ ), é usado na distribuição de probabilidade;

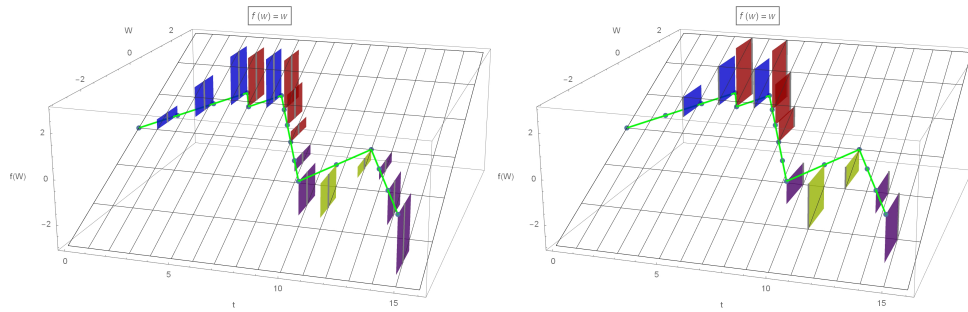


Figura 4.1: Exemplo de passeio aleatório

- $t$  é uma seqüência crescente contida no intervalo fechado  $[0;T]$  e  $t_j$  é o  $j$ -ésimo valor dessa seqüência
- $\lambda$  é um valor real pertencente ao intervalo fechado  $[0;1]$ . Se  $\lambda = \frac{1}{2}$ , então será uma integral de Stratonovich e se  $\lambda = 0$ , então será a integral de Itô (EVANS, p. 63, 2012);
- $S(f(W), t, \lambda)$  associa a cada amostra  $w_{t_k}$  (uma vez que tem-se uma seqüência de valores de  $t$  e que  $w$  depende de  $t$ , então tem-se uma seqüência de eventos e  $w_{t_k}$  é o  $k$ -ésimo valor da amostra).

Na soma de Riemann que é introduzida comumente no curso Cálculo (GUIDORIZZI, 2000), tinha-se parcelas do tipo  $f(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$ , em que  $\forall_k (t_k < t_{k+1})$  ( $t_k$  é crescente), portanto sempre era tido como  $t_{k+1} - t_k > 0$ . Agora, na soma de Riemann estocástica, tem-se parcelas do tipo  $f(W_{\tau_k}) \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$  e já não há nenhuma garantia de que  $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$  seja positivo, na verdade, pode ser nulo ou mesmo negativo e  $W_{t_k}$ , em relação a  $k$ , pode ter intervalos em que é crescente intercalados com intervalos onde é decrescente, não há um padrão, tornando possível esses resultados não positivos. Um exemplo disso pode ser visto na figura 4.1, em que os retângulos azuis se anulam com os vermelhos, e aqueles amarelos se anulam com os roxos. Isso é, em verde tem-se o caminho que ligam os pontos em preto (estes pontos são efetivamente os valores pertencentes às amostras). Os retângulos representam as áreas cujos valores são  $f(W_{\tau_k}) \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$ , cuja altura é dada por  $f(W_{\tau_k})$  e a base é dada por  $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$ . Os retângulos em: azul e em roxo representam valores positivos de  $f(W_{\tau_k}) \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$  sendo que em azul tem-se  $((f(W_{\tau_k}) \geq 0) \wedge (W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \geq 0))$  e em roxo tem-se  $((f(W_{\tau_k}) < 0) \wedge (W_{t_{k+1}} - W_{t_k} < 0))$  e em amarelo e vermelho indicam valores negativos de  $f(W_{\tau_k}) \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$  sendo que em vermelho tem-se  $((f(W_{\tau_k}) \geq 0) \wedge (W_{t_{k+1}} - W_{t_k} < 0))$  e em amarelo tem-se  $((f(W_{\tau_k}) < 0) \wedge (W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \geq 0))$ .

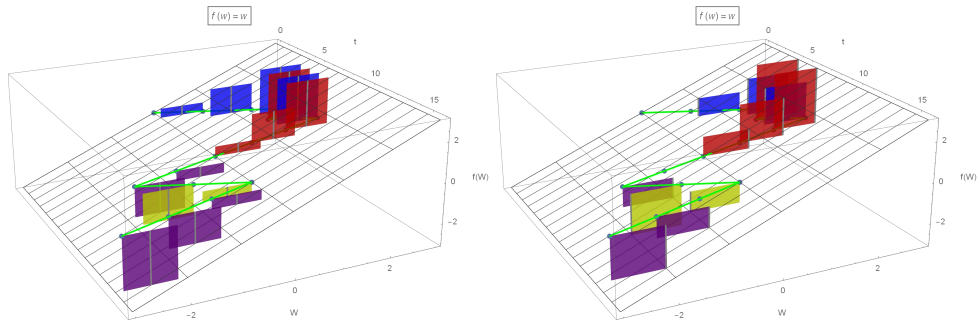


Figura 4.2: Exemplo de passeio aleatório visto de frente.

Uma outra maneira de enxergar o gráfico descrito pela figura 4.1 é apresentado pela figura 4.2, em que se rotaciona para que se veja de outra maneira. Observa-se que os retângulos vermelhos e azuis de mesmo tamanho representam valores que se anulam na figura da esquerda, assim como para os retângulos roxos e amarelos de mesmo tamanho, contudo na figura da direita, não ocorre tal anulação. Assim a soma de Riemann estocástica coincide, no caso em que  $\lambda = \frac{1}{2}$  (figura da esquerda) com a soma de Riemann cujo intervalo tem por extremos os valores  $W_{t_0}(w)$  e  $W_{t_n}(w)$  (não se leva em consideração o caminho tomado do ponto inicial até o final).

## 4.2 Exemplos

### 4.2.1 A integral na forma $\int_t^T (1)dW$

A integral estocástica  $\int_t^T (1)dW$  é definida por:

$$\int_t^T (1)dW = \lim_{|P_n| \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (1 \cdot (W_{t_{k+1}}(w_{t_{k+1}}) - W_{t_k}(w_{t_k}))) \right) \quad (4.4)$$

o somatório da qual se está calculando o limite pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}})}_{= \sum_{k=1}^{n-1} (W_{t_k}) + W_{t_n}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_k})}_{= W_{t_0} + \sum_{k=1}^{n-1} (W_{t_k})} = W_{t_n} - W_{t_0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

portanto

$$\int_t^T (1)dW = \lim_{|P_n| \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (1 \cdot (W_{t_{k+1}}(w_{t_{k+1}}) - W_{t_k}(w_{t_k}))) \right) = W_T(w_T) - W_t(w_t) \quad (4.6)$$

### 4.2.2 A integral na forma $\int_t^T (W)dW$

A integral estocástica  $\int_t^T (W)dW$  é definida, em Riemann, por

$$\int_t^T (W)dW = \lim_{|P_n| \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (W_{\tau_k} \cdot (W_{t_{k+1}}(w_{t_{k+1}}) - W_{t_k}(w_{t_k}))) \right) \quad (4.7)$$

em que  $\tau_k := (1-\lambda) \cdot t_k + \lambda \cdot t_{k+1}$  e  $\lambda \in [0; 1]$ .

No caso em que  $\lambda=0$ , se denominará integral estocástica de Itô (cuja notação encontrada na literatura é  $\int(W)dW$ ), e no caso em que  $\lambda=\frac{1}{2}$ , denomina-se integral estocástica de Stratonovich (sua notação encontrada na literatura é  $\int(W)\circ dW$ ).

Para se calcular tal integral, começará-se por trabalhar nas seguintes expressões

$$(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 = W_{t_{k+1}}^2 - 2 \cdot W_{t_{k+1}} \cdot W_{t_k} + W_{t_k}^2 \quad (4.8)$$

$$(W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 = W_{\tau_k}^2 - 2 \cdot W_{\tau_k} \cdot W_{t_k} + W_{t_k}^2 \quad (4.9)$$

$$(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_k}) \cdot (W_{\tau_k} - W_{t_k}) = W_{t_{k+1}} \cdot W_{\tau_k} - W_{t_{k+1}} \cdot W_{t_k} - W_{\tau_k}^2 + W_{\tau_k} \cdot W_{t_k} \quad (4.10)$$

e a partir da seguinte combinação linear delas, temos

$$\begin{aligned} & \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2}_{= -\frac{W_{t_{k+1}}^2}{2} + W_{t_{k+1}} \cdot W_{t_k} - \frac{W_{t_k}^2}{2}} + \underbrace{W_{\tau_k}^2 - 2 \cdot W_{\tau_k} \cdot W_{t_k} + W_{t_k}^2}_{(W_{\tau_k} - W_{t_k})^2} + \underbrace{(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_k}) \cdot (W_{\tau_k} - W_{t_k})}_{= W_{t_{k+1}} \cdot W_{\tau_k} - W_{t_{k+1}} \cdot W_{t_k} - W_{\tau_k}^2 + W_{\tau_k} \cdot W_{t_k}} = \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$= \frac{W_{t_k}^2 - W_{t_{k+1}}^2}{2} + W_{\tau_k} \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \quad (4.12)$$

e, calculando o somatório (em ambos os membros da equação anterior), tem-se

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2}{2} + (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 + (W_{t_{k+1}} - W_{\tau_k}) \cdot (W_{\tau_k} - W_{t_k}) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{W_{t_k}^2 - W_{t_{k+1}}^2}{2} + W_{\tau_k} \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right) \quad (4.13)$$

$$= \frac{W_{t_0}^2}{2} - \frac{W_{t_n}^2}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} (W_{\tau_k} \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})) \quad (4.14)$$

portanto temos a seguinte série (tal série será usada na soma de Riemann que define a integral  $\int W dW$ )

$$\sum_{k=0}^{n-1} (W_{\tau_k} \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})) = \frac{W_{t_n}^2}{2} - \frac{W_{t_0}^2}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \left( -\frac{(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2}{2} + (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 + (W_{t_{k+1}} - W_{\tau_k}) \cdot (W_{\tau_k} - W_{t_k}) \right) \quad (4.15)$$

Pode-se analisar cada expressão dentro do somatório por meio da convergência em média quadrática para verificarmos para quais valores elas tendem.

Primeiro, para reescrever algumas dessas expressões, define-se o seguinte

$$Q_n := \sum_{k=0}^{n-1} \left( (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 \right) \quad (4.16)$$

e lembrando que  $\tau_k := \lambda \cdot t_{k+1} + (1-\lambda) \cdot t_k$ , tem-se que

$$\tau_k - t_k = \lambda \cdot t_{k+1} - \lambda \cdot t_k = \lambda \cdot (t_{k+1} - t_k), \quad \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_k - t_k) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = \lambda \cdot (t_n - t_0) \quad (4.17)$$

e assim, tem-se que

$$Q_n - \lambda \cdot (t_n - t_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k) \right) \quad (4.18)$$

Agora, vamos para a convergência em média quadrática de  $Q_n$ , na qual se suspeita que

converge para  $\lambda \cdot (t_n - t_0)$ . Tal convergência é expressada por

$$\mathcal{E}\left((Q_n - \lambda \cdot (t_n - t_0))^2\right) = \int \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( (W_{\tau_j} - W_{t_j})^2 - (\tau_j - t_j) \right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left( (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k) \right) \right) d\mathcal{P} \quad (4.19)$$

$$= \int \left( \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( ((W_{\tau_j} - W_{t_j})^2 - (\tau_j - t_j)) \cdot ((W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k)) \right) \right) \right) d\mathcal{P} \quad (4.20)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int \left( ((W_{\tau_j} - W_{t_j})^2 - (\tau_j - t_j)) \cdot ((W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k)) \right) d\mathcal{P} \right) \right) \quad (4.21)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left( \mathcal{E} \left( ((W_{\tau_j} - W_{t_j})^2 - (\tau_j - t_j)) \cdot ((W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k)) \right) \right) \right) \quad (4.22)$$

nos casos em que  $j \neq k$ , tem-se que os intervalos  $(t_j; \tau_j)$  e  $(t_k; \tau_k)$  são disjuntos e portanto  $(W_{\tau_j} - W_{t_j})$  e  $(W_{\tau_k} - W_{t_k})$  são estocasticamente independentes, assim, tem-se:

$$\mathcal{E} \left( ((W_{\tau_j} - W_{t_j})^2 - (\tau_j - t_j)) \cdot ((W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k)) \right) = \quad (4.23)$$

$$= \mathcal{E} \left( (W_{\tau_j} - W_{t_j})^2 - (\tau_j - t_j) \right) \cdot \mathcal{E} \left( (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k) \right) \quad (4.24)$$

e sabe-se que a média  $\mathcal{E}(W_{\tau_k} - W_{t_k}) = 0$  e que a variância é dada por  $\mathcal{E} \left( (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 \right) = \tau_k - t_k$ , assim tem-se que:

$$\mathcal{E} \left( (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k) \right) = \mathcal{E} \left( (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 \right) - \mathcal{E}(\tau_k - t_k) = (\tau_k - t_k) - (\tau_k - t_k) = 0 \quad (4.25)$$

portanto, os casos em que  $j \neq k$  o valor esperado é nulo, assim só nos interessa os casos em que  $j = k$ .

Para tal caso, reescrever-se-á a expressão de outra forma. Vamos definir a seguinte variável

$$Y_k := \frac{W_{\tau_k} - W_{t_k}}{\sqrt{\tau_k - t_k}} \quad (4.26)$$

tal transformação de variáveis, para uma expressão  $W_{\tau_k} - W_{t_k}$  que tem uma distribuição gaussiana de média 0 e desvio padrão de  $\sqrt{\tau_k - t_k}$  resulta em que  $Y_k$  terá uma distribuição normal com média 0 e variância constante igual a 1. Tem-se que:

$$(Y_k^2 - 1) \cdot (\tau_k - t_k) = \left( \frac{(W_{\tau_k} - W_{t_k})^2}{\tau_k - t_k} - \frac{\tau_k - t_k}{\tau_k - t_k} \right) \cdot (\tau_k - t_k) = (W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k) \quad (4.27)$$

$$\mathcal{E} \left( ((W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k))^2 \right) = \mathcal{E} \left( (Y_k^2 - 1)^2 \cdot (\tau_k - t_k)^2 \right) = \mathcal{E} \left( (Y_k^2 - 1)^2 \right) \cdot (\tau_k - t_k)^2 \quad (4.28)$$

$$= \left( \mathcal{E}(Y_k^4) - 2 \cdot \mathcal{E}(Y_k^2) + 1 \right) \cdot (\tau_k - t_k)^2 \quad (4.29)$$

em que  $\mathcal{E}(Y_k^n)$  são os momentos da gaussiana, que no caso em que a média e a variância são constantes (não dependem de parâmetros), tais momentos também serão constantes, assim,

resume-se que  $(\mathcal{E}(Y_k^4) - 2 \cdot \mathcal{E}(Y_k^2) + 1) = c$ , assim:

$$\mathcal{E}((Q_n - \lambda \cdot (t_n - t_0))^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \mathcal{E}(((W_{\tau_k} - W_{t_k})^2 - (\tau_k - t_k))^2) \right) \quad (4.30)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (c \cdot (\tau_k - t_k)^2) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (c \cdot |P_n| \cdot (\tau_k - t_k)) = c \cdot |P_n| \cdot \lambda \cdot (t_n - t_0) \quad (4.31)$$

portanto, quando  $|P_n| \rightarrow 0$  tem-se que  $\mathcal{E}((Q_n - \lambda \cdot (t_n - t_0))^2) \rightarrow 0$ , portanto  $Q_n$  converge em média quadrática para  $\lambda \cdot (t_n - t_0)$

Agora, voltará a expressão que se queria analisar, quando  $|P_n| \rightarrow 0$ , tem-se, em convergência em média quadrática, que

$$\sum_{k=0}^{n-1} ((W_{\tau_k} - W_{t_k})^2) \rightarrow \lambda \cdot (t_n - t_0) \quad (4.32)$$

e, quando  $\lambda=1$ , tem-se que  $\tau_k = t_{k+1}$ , assim, da fórmula anterior, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2) \rightarrow (t_n - t_0) \quad (4.33)$$

e para  $(W_{t_{k+1}} - W_{\tau_k}) \cdot (W_{\tau_k} - W_{t_k})$ , tem-se que tal expressão é estocasticamente independente, pois os intervalos  $(t_k; \tau_k)$  e  $(\tau_k; t_{k+1})$  são disjuntos. A fórmula anteriormente introduzida em 2.30 tem como justificativa a 3.39. Então:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ((W_{t_{k+1}} - W_{\tau_k}) \cdot (W_{\tau_k} - W_{t_k})) \rightarrow 0 \quad (4.34)$$

e assim, tem-se

$$\sum_{k=0}^{n-1} (W_{\tau_k} \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})) \rightarrow \frac{W_n^2}{2} - \frac{W_{t_0}^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot (t_n - t_0) + \lambda \cdot (t_n - t_0) + 0 \quad (4.35)$$

e a integral estocástica será dada por

$$\int_r^s (W_t) dW_t = \frac{W_s^2 - W_r^2}{2} - \frac{s-r}{2} + \lambda \cdot \frac{s-r}{2} \quad (4.36)$$

assim, a integral de Itô (em que  $\lambda=0$ ) será

$$\int_r^s (W_t) dW_t = \frac{W_s^2 - W_r^2}{2} - \frac{r-s}{2} \quad (4.37)$$

e a integral de Stratonovich (em que  $\lambda=1/2$ ) será:

$$\int_r^s (W_t) \circ dW_t = \frac{W_s^2 - W_r^2}{2} \quad (4.38)$$

#### 4.2.2.1 Integral de Stratonovich (soma de Riemann)

Suponha-se que para um determinado  $k$ , haja a expressão

$$W_{t_{k+1}} = W_{t_k} + \Delta w, \quad W_{t_{k+2}} = W_{t_{k+1}} - \Delta w \quad (4.39)$$



nessa situação, tem-se que os argumentos  $W_{\tau_k} = W_{t_k} + \lambda \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$  de  $f$  (sendo  $\lambda = \frac{1}{2}$  para a integral de Stratonovich) serão dados por

$$W_{\tau_k} = W_{t_k} + \frac{1}{2} \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = W_{t_k} + \frac{\Delta w}{2}, \quad (4.40)$$

$$W_{\tau_{k+1}} = W_{t_{k+1}} + \frac{1}{2} \cdot (W_{t_{k+2}} - W_{t_{k+1}}) = (W_{t_k} + \Delta w) - \frac{\Delta w}{2} = W_{t_k} + \frac{\Delta w}{2} \quad (4.41)$$

portanto, nesse caso,  $f(W_{\tau_k}) = f(W_{\tau_{k+1}})$ , e assim as seguintes parcelas que compõem a soma de Riemann, resultarão em

$$f(W_{\tau_k}) \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + f(W_{\tau_{k+1}}) \cdot (W_{t_{k+2}} - W_{t_{k+1}}) = f(W_{\tau_k}) \cdot \Delta w + f(W_{\tau_k}) \cdot (-\Delta w) = 0 \quad (4.42)$$

assim, vê-se que nesse caso, quando apresenta-se no caminho amostrado uma “ida” e uma “volta”, a área acumulada é 0, pois a área calculada na “ida” se anula com a área que é decrescida na “volta”. Assim, a integral estocástica de Stratonovich só depende do ponto inicial e do final e é igual à integral (não estocástica).

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(W_t)) \circ dW_t = \int_{t_1}^{t_2} (f(u)) du \quad (4.43)$$

#### 4.2.2.2 Integral de Itô (soma de Riemann)

Suponha-se que para um determinado  $k$ , haja a expressão

$$W_{t_{k+1}} = W_{t_k} + \Delta w, \quad W_{t_{k+2}} = W_{t_{k+1}} - \Delta w \quad (4.44)$$

nessa situação, têm-se que os argumentos  $W_{\tau_k} = W_{t_k} + \lambda \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$  de  $f$  (sendo  $\lambda = 0$  para a integral de Stratonovich) serão dados por:

$$W_{\tau_k} = W_{t_k} + 0 \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = W_{t_k}, \quad (4.45)$$

$$W_{\tau_{k+1}} = W_{t_{k+1}} + 0 \cdot (W_{t_{k+2}} - W_{t_{k+1}}) = W_{t_{k+1}} \quad (4.46)$$

portanto, as seguintes parcelas que compõem a soma de Riemann, resultarão em:

$$f(W_{\tau_k}) \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + f(W_{\tau_{k+1}}) \cdot (W_{t_{k+2}} - W_{t_{k+1}}) = f(W_{t_k}) \cdot \Delta w + f(W_{t_{k+1}}) \cdot (-\Delta w) \quad (4.47)$$

$$= (f(W_{t_k}) - f(W_{t_{k+1}})) \cdot \Delta w \quad (4.48)$$

Assim, quanto mais “idas” e “vindas” no caminho amostral, mesmo que o ponto inicial e o final sejam os mesmos, haverá um acúmulo de “área” (cujo sinal dependerá de onde ocorrem as “idas” e “vindas”, dependendo de qual seja a função  $f$ ).

## 5.0 Equações diferenciais estocásticas

As equações diferenciais estocásticas tem suas primeiras aparições acadêmicas em Bachelier (1900) e um pouco depois, quase que simultaneamente nos trabalhos de Einstein e Smoluchowski (ambos 1905), a fim de resolver os Movimentos Brownianos anteriormente descritos. Itô e Stratonovich, conforme será apresentado abaixo (EVANS, 2013 p. 83), deram uma base mais sólida matematicamente.

### 5.1 Introdução

Exemplo:  $dX=dW_t$

Seja  $X(t)=W_t(w_t)$ , que nos dá a seguinte equação diferencial estocástica

$$dX(t)=0 \cdot dt + 1 \cdot dW_t \quad (5.1)$$

e considera-se:

$$U(X(t),t)=e^{\lambda \cdot X(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}} \quad (5.2)$$

tem-se que a diferencial total estocástica é calculada através da regra da cadeia de Itô

$$dU = \left( \dot{U} + U' \cdot F + \frac{1}{2} \cdot U'' \cdot G^2 \right) \cdot dt + U' \cdot G \cdot dW_t \text{ com } U' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}}, U'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}}, \quad (5.3)$$

$$\dot{U} = -\frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}}, F=0, G=1 \quad (5.4)$$

em que  $F$  é a função que multiplica  $dt$  e  $G$  é a função que multiplica  $dW_t$ , e substituindo tem-se

$$\begin{aligned} dU &= \left( -\frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}} + \lambda \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}} \cdot 1^2 \right) \cdot dt + \lambda \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}} \cdot 1 \cdot dW \\ d(e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}}) &= 0 \cdot dt + \lambda \cdot e^{\lambda \cdot X - \frac{\lambda^2 t}{2}} \cdot 1 \cdot dW \\ d(U(W,t)) &= 0 \cdot dt + \lambda \cdot U(W,t) dW \end{aligned} \quad (5.5)$$

Portanto, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} dU(W_t,t) = \lambda \cdot U(W_t,t) \cdot dW_t \\ U(W_0,0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow U(W_t,t) = e^{\lambda \cdot W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} \quad (5.6)$$

### 5.1.1 Um exemplo do modelo de Black-Scholes) $dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW_t$ e $S(0) = s_0$

Black-Scholes se refere a um modelo matemático que é usado com o intuito de estudar as dinâmicas de mercados financeiros que contenham instrumentos de investimentos por derivativos (ZVI BODIE et al., 2008). Seja a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW_t \\ S(0) = s_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

na qual pode-se reescrever da seguinte forma:

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW \quad (5.8)$$

e considere

$$U(S, t) = \ln(S) \quad (5.9)$$

tem-se que a diferencial total estocástica é calculada através da regra da cadeia de Itô

$$dU = \left( \dot{U} + U' \cdot F + \frac{1}{2} \cdot U'' \cdot G^2 \right) \cdot dt + U' \cdot G \cdot dW \text{ com } U' = S^{-1}, U'' = -S^{-2}, \dot{U} = 0, F = \mu \cdot S, G = \sigma \cdot S \quad (5.10)$$

em que  $F$  é a função que multiplica  $dt$  e  $G$  é a função que multiplica  $dW_t$ , e substituindo tem-se

$$\begin{aligned} dU &= \left( 0 + S^{-1} \cdot \mu \cdot S + \frac{1}{2} \cdot (-S^{-2}) \cdot (\sigma \cdot S)^2 \right) \cdot dt + S^{-1} \cdot \sigma \cdot S \cdot dW \\ dU &= \left( \mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot dt + \sigma \cdot dW \end{aligned} \quad (5.11)$$

integrando, tem-se

$$\int_0^t dU = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) du + \int_0^t (\sigma) dW_u \quad (5.12)$$

$$\underbrace{U(S(t))}_{=\ln(S(t))} - \underbrace{U(S(0))}_{=\ln(s_0)} = \left( \mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot (t - 0) + \sigma \cdot (W_t - W_0) \quad (5.13)$$

$$S(t) = s_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot t + \sigma \cdot W_t} \quad (5.14)$$

## 5.2 Equações diferenciais estocásticas lineares

### 5.2.1 Terminologia

A equação diferencial:

$$dX = b(X, t) \cdot dt + B(X, t) \cdot dW \quad (5.15)$$

é denominada equação diferencial estocástica, em que:

- $X = X_{w_t}(t)$  que depende do tempo  $t$  e da seqüência de eventos indexados pelo tempo  $w_t$ , ou seja,  $w$  é uma função do intervalo de números reais  $[0; T]$  para o espaço amostral  $\Omega$ . Para

cada função  $t \mapsto \omega_t$ , tem-se um caminho diferente, resultando num  $X$  diferente.  $X$  assume valores em  $\mathbb{R}$ ;

- $b$  é uma função em que  $\mathcal{E}\left(\int_0^T (|b|)dt\right) \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $b$  deve ser integrável e possuir valor esperado finito;
- $B$  é uma função em que  $\mathcal{E}\left(\int_0^T (B^2)dt\right) \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $B$  deve ser quadrado-integrável e possuir valor esperado finito;
- $W = W_t(\omega_t)$  é uma variável aleatória, sendo  $\omega$  um elemento do espaço amostral e  $t$  é um parâmetro pertencente ao intervalo  $[0;T]$ . A diferencial  $dW$  tem um significado diferente, no sentido em que não varia apenas uma variável, e sim um intervalo delas.

### 5.2.2 Equação diferencial estocástica linear

Seja a equação diferencial estocástica

$$dX = b(X,t) \cdot dt + B(X,t) \cdot dW_t \text{ em que } b(x,t) = b_0(t) + b_1(t) \cdot x \text{ e } B(x,t) = B_0(t) + B_1(t) \cdot x \quad (5.16)$$

é dita linear.

### 5.2.3 Equação diferencial estocástica linear homogênea

Seja a equação diferencial estocástica

$$dX = b(X,t) \cdot dt + B(X,t) \cdot dW_t \text{ em que } b(x,t) = b_1(t) \cdot x \text{ e } B(x,t) = B_1(t) \cdot x \quad (5.17)$$

é dita linear homogênea.

### 5.2.4 Equação diferencial estocástica linear no sentido estrito

Seja a equação diferencial estocástica

$$dX = b(X,t) \cdot dt + B(X,t) \cdot dW_t \text{ em que } b(x,t) = b_0(t) + b_1(t) \cdot x \text{ e } B(x,t) = B_0(t) \quad (5.18)$$

é dita linear no sentido estrito.

### 5.2.5 Solução da Equação diferencial estocástica linear no sentido estrito (caso em que $b_1(t)$ é constante)

Seja a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX = (b_0(t) + b_1 \cdot X) \cdot dt + B_0(t) \cdot dW_t \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.19)$$

onde  $b_1$  e  $x_0$  são constantes. A solução é dada por

$$X(t) = e^{b_1 t} \cdot x_0 + \int_0^t (e^{b_1(t-u)} \cdot b_0(u)) du + \int_0^t (e^{b_1(t-u)} \cdot B_0(u)) dW_u \quad (5.20)$$

### 5.2.6 Solução da Equação diferencial estocástica linear no sentido estrito (caso em que $b_1(t)$ não é necessariamente constante)

Seja a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX = (b_0(t) + b_1(t) \cdot X) \cdot dt + B_0(t) \cdot dW_t \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

tem solução dada por

$$X(t) = Y(t) \cdot \left( x_0 + \int_0^t (Y(u)^{-1} \cdot b_0(u)) du + \int_0^t (Y(u)^{-1} \cdot B_0(u)) dW_u \right) \quad (5.22)$$

sendo que  $Y$  é a solução da equação diferencial  $dY = b_1(t) \cdot Y \cdot dt$  e condição inicial  $Y(0) = 1$ .

### 5.2.7 Solução da Equação diferencial estocástica linear

Seja a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX = (b_0(t) + b_1(t) \cdot X) \cdot dt + (B_0(t) + B_1(t) \cdot X) \cdot dW \\ X(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.23)$$

sua solução é dada por

$$X(t) = Y(t) \cdot \left( x_0 + \int_0^t (Y(\tau)^{-1} \cdot (b_0(\tau) - B_0(\tau) \cdot B_1(\tau))) d\tau + \int_0^t (Y(\tau)^{-1} \cdot B_0(\tau)) dW \right) \quad (5.24)$$

sendo que  $Y(t) = e^{\int_0^t (b_1(\tau) - \frac{B_1(\tau)^2}{2}) d\tau + \int_0^t (B_1(\tau)) dW}$ .

## 6.0 Considerações Finais

As integrais estocásticas, conforme apresentado, se comportam um pouco diferente das integrais comumente apresentadas quando aplicadas em funções não estocásticas, no que tange a Riemann. Isso é, há a incidência de valores negativos, portanto devendo ser interpretada como a soma e a subtração (conforme peculiaridades de cada movimento, função ou passeio) dos caminhos percorridos.

Tendo apresentado as duas formas de se calcular a integral de Riemann, ou seja, por Itô ou por Stratonovich, é reconhecido academicamente que isso leva a diferentes resultados quando, em um mesmo processo estocástico, utiliza-se as duas formas de integração, conforme afirmado por Braumann (2005, p. 108).

Portanto, fará parte de trabalhos futuros explorar tal peculiaridade.

De igual maneira, conforme apresentadas, as equações diferenciais estocásticas nasceram como uma maneira, apresentadas nos trabalhos de Smoluchowski e Einstein, em resolver os problemas apresentados por processos estocásticos e mais tarde por Itô e Stratonovich. Entretanto, há muito campo para desenvolvimento, e portanto é e deverá fazer parte também de trabalhos futuros, inclusive na parte de equação diferencial parcial.

## 7.0 Referências Bibliográficas

- BODIE, Zvi et al. **Investments** (SIE). McGraw-Hill Education, 2008.
- BRAUMANN, Carlos A. **Introdução as Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações.**: Évora: Sociedade Portuguesa de Estatística, Ericeira, Portugal, p. 190, 2005.
- BRUSH, Stephen G. **A history of random processes.**: Archive for history of exact sciences, v. 5, n. 1. Berlim: 1968.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, vol 4** Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.
- EVANS, Lawrence C. **An introduction to stochastic differential equations.** Califórnia: American Mathematical Soc., 2013.
- ROSS, Sheldon M. **A first course in probability.** Nova Jérsei: Pearson, 1998.
- SAW, John G.; YANG, Mark CK; MO, Tse Chin. **Chebyshev Inequality with Estimated Mean and Variance**, v. 38, n. 2, Califórnia: The American Statistician.
- SERGE, Lang. **A first course in calculus.** Nova Iorque: Addison-Wesley Pub Co, 2012.
- TABOR, David; TABOR, D. **Gases, liquids and solids:** and other states of matter. Cambridge: Cambridge university press, 1991.
- WEATHERALL, James Owen. **The physics of wall street:** a brief history of predicting the unpredictable. Boston: Houghton Mifflin Harcourt, 2013.