Letícia Félix Jerônimo

# Aplicação da derivada fuzzy linearmente correlacionada na análise do valor acumulado por fundos de pensão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

15/07/2019

Letícia Félix Jerônimo

# Aplicação da derivada fuzzy linearmente correlacionada na análise do valor acumulado por fundos de pensão

Trabalho de conclusão de Piepex apresentado ao Instituto de Ciências Sociais Aplicadas (ICSA) da Universidade Federal de Alfenas como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Economia.
Orientador: Sílvio Antônio Bueno Salgado

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS
15/07/2019

LETÍCIA FÉLIX JERÔNIMO

# Aplicação da derivada fuzzy linearmente correlacionada na análise do valor acumulado por fundos de pensão

Trabalho de conclusão de Piepex apresentado ao Instituto de Ciências Sociais Aplicadas (ICSA) da Universidade Federal de Alfenas como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Economia.
Orientador: Sílvio Antônio Bueno Salgado

Aprovado em:

Prof$^{a}$ : Cláudia Adam Ramos    Assinatura:
Instituição: Universidade Federal de Alfenas - ICSA

Prof$^{\circ}$ : Danilo Machado Pires    Assinatura:
Instituição: Universidade Federal de Alfenas - ICSA

Prof$^{\circ}$/Orientador : Sílvio Antônio Bueno Salgado    Assinatura:
Instituição: Universidade Federal de Alfenas - ICSA

# Resumo

O segmento de previdência complementar, sendo visto como uma alternativa de complemento da aposentadoria dos trabalhadores ao fim de sua vida laboral, vem crescendo nos últimos anos. No período de 2016 a 2018, o número de participantes ativos das Entidades Fechadas de Previdência Complementar cresceu cerca de 5% (ABRAPP, 2018). Os fundos de pensão, que compõem este segmento, representam 13,4% do Produto Interno Bruto (PIB) do país (ABRAPP, 2018), e são instituições que estão expostas à diversos riscos que podem impossibilitar seu funcionamento. O objetivo deste trabalho é analisar a incerteza presente no período de acumulação dos planos de contribuição definida oferecidos por fundos de pensão, aplicando a lógica fuzzy. A análise do problema será feita por meio da aplicação da derivada fuzzy linearmente correlacionada na resolução de um Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) com condição inicial dada por um número fuzzy. A solução encontrada para o PVIF proposto demonstra ser uma boa ferramenta que pode vir a ser desenvolvida para a determinação do valor a ser acumulado por um fundo de pensão. A adoção de mais variáveis que impactam a reserva a ser acumulada é uma proposta para futuras análises desse problema enfrentado pelos fundos de pensão.

**Palavras-chave**: Gestão de Risco. Fundos de Pensão. Conjuntos Fuzzy. Derivada Fuzzy Linearmente Correlacionada.

# Abstract

The complementary pension segment, seen as an alternative to supplement worker's retirement at the end of their working life, has been growing in recent years. In the period from 2016 to 2018, the number of active participants of the Closed Entities of Complementary Pension Plan grew by 5% (ABRAPP, 2018). Pension funds, which make up this segment, account for 13.4% of the country's Gross Domestic Product (GDP) (ABRAPP, 2018), and are institutions that are exposed to various risks that may make it impossible to operate. The objective of this paper is to analyze the uncertainty present in the period of accumulation of defined contribution plans offered by pension funds, applying the fuzzy logic. The analysis of the problem will be done by applying the linearly correlated fuzzy derivative in the resolution of a Fuzzy Initial Value Problem (PVIF) with initial condition given by a fuzzy number. The solution found for the proposed PVIF proves to be a good tool that can be developed to determine the amount to be accumulated by a pension fund. The adoption of more variables that impact the reserve to be accumulated is a proposal for future analysis of this problem faced by pension funds.

**Keywords**: Risk Management. Pension Funds. Fuzzy Sets. Linearly Correlated Fuzzy Derivative.

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| Abraap | Associação brasileira das entidades fechadas de previdência complementar |
| AMBIMA | Associação brasileira das entidades dos mercados financeiro e de capitais |
| BD | Plano de benefício definido |
| CD | Plano de contribuição definida |
| $D_L F(t_0)$ | Derivada fuzzy linearmente correlacionada de $F$ em $t_0$ |
| IBGE | Instituto brasileiro de geografia e estatística |
| PIB | Produto interno bruto |
| PVI | Problema de valor inicial |
| PVIF | Problema de valor inicial fuzzy |
| $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ | Família de números fuzzy |
| $a^\alpha_-, a^\alpha_+$ | Extremidade inferior e extremidade superior do $\alpha-$nível do número fuzzy $A$, isto é, $[A]^\alpha = [a^\alpha_-, a^\alpha_+]$ |
| RGPS | Regime Geral de Previdência Social |
| RPC | Regime de Previdência Complementar |
| RPPS | Regime Próprio de Previdência Social |

# Sumário

# Introdução

Segundo um levantamento realizado pela Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (Abrapp), referente ao mês de novembro de 2018, os ativos dos fundos de pensão atingiram R$ 901 bilhões passando a representar 13,4% do PIB brasileiro (ABRAPP, 2018), mostrando a grande representatividade desse segmento na economia brasileira. Os fundos de pensão fazem parte do Regime de Previdência Complementar (RPC) e têm por finalidade "proporcionar ao trabalhador uma proteção previdenciária adicional àquela oferecida pelo Regime Geral de Previdência Social (RGPS) ou pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS)"(BRASIL, 1988).

Pode-se dividir a atuação dos participantes dos fundos de pensão em duas fases: a de acumulação e a de pagamento. A primeira fase, é o período que vai da adesão ao plano até a aposentadoria, e é nessa fase que será acumulada a poupança suficiente para que o participante receba o benefício contratado. Já a segunda fase, compreende o período que vai da aposentadoria até o fim da cobertura do plano (RODRIGUES, 2008, p.19). Nessa fase, o fundo de pensão empenha-se em cumprir com a obrigação de pagar o benefício ao participante ou ao beneficiário.

A forma de pagamento irá depender do tipo de plano contratado, que são divididos basicamente em dois tipos: plano de benefício definido (BD) e plano de contribuição definida (CD). No primeiro, as parcelas que serão pagas pelo plano, e o valor do benefício que será recebido, são previamente estabelecidos. No segundo, apenas as parcelas pagas na fase de acumulação são previamente definidas, sendo que o montante acumulado é incerto, pois ele dependerá de determinadas variáveis, como a rentabilidade dos investimentos em que foram aplicadas as parcelas e da taxa de inflação no período considerado.

A previsão do montante acumulado por fundos de pensões foi objeto de estudo de Oliveira (2014), que utilizou modelos econométricos para a análise de séries temporais referentes à dados de rentabilidade de um fundo de pensão. O problema de capitalização para planos CD foi abordado por Penna e Moraes (2000), que desenvolveram um modelo de matemática financeira que busca fornecer o saldo final do fundo de investimento, considerando alguns parâmetros como o tempo de contribuição e a taxa de investimento. Em busca de um modelo que forneça o equilíbrio financeiro e atuarial entre o ativo e o passivo, Motta e Rocha (2002) analisaram um modelo estocástico para o passivo atuarial de um fundo de pensão, utilizando o método Simulação de Monte-Carlo.

Diante da importância dos fundos de pensão para a economia, e também da necessidade do aprimoramento dos regimes de financiamento previdenciário, o objetivo deste trabalho é analisar a incerteza presente no período de acumulação dos planos de contribuição definida, oferecidos por fundos de pensão, aplicando conjuntos fuzzy. Com a Teoria de conjuntos fuzzy, surge a lógica fuzzy que pode ser vista como uma extensão da lógica clássica à medida que possibilita dar um tratamento matemático à termos linguísticos subjetivos. Utilizando-a, pode-se estabelecer que objetos pertencem à determinada classe por meio de graus de pertinência que variam de 0 a 1, sendo que 0 indica que o objeto não pertence à classe, e 1 indica pertinência total do objeto à classe.

A análise do problema proposto será feita por meio da aplicação da derivada fuzzy linearmente correlacionada (L-derivada), para obter-se a solução de um PVIF, com a condição inicial dada por um número fuzzy. O modelo utilizado é o de capitalização contínua, que representará a variação do capital acumulado em relação ao tempo, por meio de uma função diretamente proporcional à taxa que incide sobre as parcelas pagas pelo plano (BASSANEZI; FERREIRA, 1988, p.34).

A L-derivada apresentada por Barros e Simões (2017) é uma noção de diferenciabilidade fuzzy que é indicada para processos fuzzy autocorrelacionados, ou seja, para funções a valores fuzzy que relacionam determinado valor futuro com um certo valor presente.

O trabalho está dividido em quatro seções, na seção 1 são apresentados alguns dos conceitos fundamentais de conjuntos fuzzy que serão necessários para o entendimento deste trabalho. Na seção 2 são apresentados os conceitos relativos aos fundos de pensões, como os principais tipos de planos de benefícios oferecidos por essas instituições, e o processo de geração do montante à ser recebido pelos participantes do plano. Na seção 3 utiliza-se a L-derivada no modelo de capitalização contínua, para se obter uma solução que permita modelar o período de acumulação dos planos de contribuição definida de fundos de pensão. E na seção 4 são apresentadas as considerações finais sobre o problema analisado.

# 1 Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos fundamentais da teoria de conjuntos fuzzy que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho.

## 1.1 Subconjuntos Fuzzy

A Teoria de Conjuntos Fuzzy foi introduzida por Lofti Asker Zadeh em 1965 com a publicação do artigo *"Fuzzy Sets"*. A Lógica Fuzzy permite dar um tratamento matemático à expressões linguísticas subjetivas, algo que não é possível de se realizar utilizando a Lógica Clássica (Booleana ou Crisp). Pela Lógica Clássica, ao se observar um copo contendo água, pode-se dizer que o copo está cheio ou está vazio, não existe um meio termo. Ou ainda, pode-se considerar uma pessoa como baixa se ela tem menos de 1,60 metros de altura, e alta se ela tem mais de 1,80 metros, não é possível estabelecer um meio termo.

**Definição 1.1** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Seja $U$ um conjunto qualquer e $A$ um subconjunto de $U$. A função*

$$\chi : U \longrightarrow \{0, 1\}$$

*definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se \;\; x \in A \\ 0 & se \;\; x \notin A \end{cases} \tag{1.1}$$

*denomina-se função característica do conjunto $A$.*

A função 1.1 associa a cada elemento $x \in U$ o valor $0$ se $x \notin A$ ou o valor $1$ se $x \in A$. Porém, em muitos casos, é difícil estabelecer se determinado elemento pertence ou não à algum subconjunto ou classe específica. No caso de uma pessoa que tem 1,79 m de altura, seria mais razoável dizer que ela pertencesse ao conjunto de pessoas altas, porém, por não estar no intervalo "maior que 1,80 m", a lógica clássica admite que ela se está no conjunto de pessoas baixas. A Lógica Fuzzy atua no sentido de quantificar situações de incerteza como essas.

**Definição 1.2** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Seja $U$ um espaço topológico. Um subconjunto fuzzy $A$ de $U$ é caracterizado por uma função*

$$\varphi_A(x) : U \longrightarrow [0, 1] \tag{1.2}$$

*denominada função de pertinência, em que $\varphi_A(x)$ denota o grau com que o elemento $x$ pertence ao subconjunto $A$.*

Se $\varphi_A(x) = 1$, o elemento $x$ tem pertinência completa ao subconjunto $A$ (caso clássico) e se $\varphi_A(x) = 0$, o elemento $x$ não tem pertinência ao subconjunto $A$.

**Exemplo 1** *Para algumas pessoas o número 1 pode ser considerado próximo de 2, mas para outras, números próximos de 2 seriam 1,9 ou 2,1. Considere o subconjunto F dos números reais próximos de 2:*

$$F(x) = \{x \in \mathbb{R} : \, x\, é\, próximo\, de\, 2\}.$$

*Se definirmos a função* $\varphi_F : \mathbb{R} \to [0,1]$, *que associa cada* $x$ *real um grau de pertinência ao subconjunto fuzzy "próximo de 2", pela expressão*

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} (1- \mid x-2 \mid) & se\, 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & se\, x \notin [1,3] \end{cases}$$

*então o subconjunto fuzzy F dos pontos próximos de 2, caracterizado por* $\varphi_F$, *é tal que* $\varphi_F(2,001) = 0,999$ *e* $\varphi_F(7) = 0$. *Neste caso dizemos que* $x = 2,001$ *é um ponto próximo de 2 com grau de pertinência 0,999 e* $x = 7$ *não é próximo de 2.*

A Figura 1.1 ilustra o subconjunto fuzzy dos números próximos de 2 do exemplo acima. Pode-se observar que quanto mais distante de $x = 2$ está o elemento $x$, menor será o grau de pertinência de $x$ à esse subconjunto fuzzy.

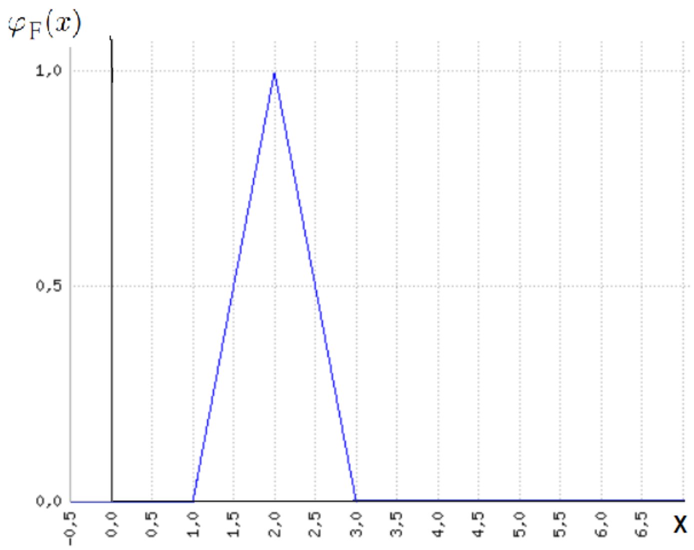


Figura 1.1 – Subconjunto fuzzy dos números próximos de 2.
Fonte: elaboração própria.

## 1.2 Operações com Subconjuntos Fuzzy

**Definição 1.3** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Consideremos $A$ e $B$ dois subconjuntos fuzzy de $U$, com funções de pertinência indicadas por $\varphi_A$ e $\varphi_B$, respectivamente. Dizemos que $A$ é subconjunto fuzzy de $B$ e escrevemos $A \subset B$, se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$.*

**Definição 1.4** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) (União). A união entre $A$ e $B$ é o subconjunto fuzzy de $U$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A\cup B}(x) = max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U. \tag{1.3}$$

*Observamos que esta definição é uma extensão do caso clássico. De fato, quando $A$ e $B$ são subconjuntos clássicos de $U$ temos:*

$$\begin{aligned} max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} &= \begin{cases} 1 & se\, x \in A\, ou\, x \in B \\ 0 & se\, x \notin A\, e\, x \notin B \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & se\, x \in A \cup B \\ 0 & se\, x \notin A \cup B \end{cases} \\ &= \chi_{A\cup B}(x), x \in U. \end{aligned}$$

**Definição 1.5** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) (Intersecção). A intersecção entre $A$ e $B$ é o subconjunto fuzzy de $U$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A\cap B}(x) = min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U. \tag{1.4}$$

**Definição 1.6** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) (Complementar de subconjuntos fuzzy). O complementar de $A$ é o subconjunto fuzzy $A'$ de $U$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), x \in U. \tag{1.5}$$

A Figura 1.2 ilustra geometricamente as operações com subconjuntos fuzzy.

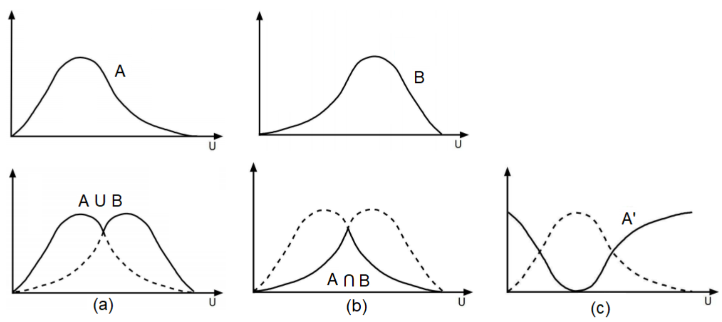


Figura 1.2 – Operações com subconjuntos fuzzy: (a) união; (b) interseção;(c) complemento.
Fonte: Barros e Bassanezi (2015, p. 22).

## 1.3 O conceito de $\alpha$-nível

Considerando-se uma situação que envolva incerteza, a pertinência de um elemento $x$ a determinada classe será estabelecida, juntamente com sua função de pertinência, por meio da definição de $\alpha$-nível. Por exemplo, para o problema de classificação da altura em baixa ou alta, podemos criar uma classe de pessoas altas considerando o nível de 0,7. Isso indica que todas as pessoas com alturas de valor $x$, que tenham grau de pertinência $\varphi(x) \geq 0,7$ pertencem à classe de pessoas altas.

**Definição 1.7** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) O $\alpha$-nível do subconjunto fuzzy A é definido por*

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in U; \varphi_A(x) \geq \alpha\} & para \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \\ \overline{\{x \in U; \varphi_A(x) \geq 0\}} & para \quad \alpha = 0 \end{cases}, \tag{1.6}$$

*em que $\overline{X}$ $denota\ o\ fecho\ do\ subconjunto\ A\ de\ U$.*

**Observação 1.1** *O conjunto $\{x \in U; \varphi_A(x) > 0\}$ denomina-se suporte de $A$ e é denotado por $suppA$.*

## 1.4 Princípio de Extensão de Zadeh

O conjunto de métodos para a análise de variáveis numéricas é visto com mais segurança e precisão do que o conjunto de técnicas para análise de variáveis linguísticas (ZADEH, 1975). Isto, de certa forma, faz com que sistemas computadorizados tenham dificuldades em lidar com situações humanísticas, ou seja, as soluções obtidas por esses sistemas podem se distanciar da realidade analisada.

Para se conseguir representar situações do “mundo subjetivo”com maior precisão é necessário estabelecer uma ponte que ligue a teoria clássica com a teoria fuzzy, com esse objetivo, foi desenvolvido o Princípio de Extensão de Zadeh.

**Definição 1.8** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) (Princípio de Extensão de Zadeh). Sejam $f$ uma função tal que $f : X \rightarrow Z$ e $A$ um subconjunto fuzzy de $X$. A extensão de Zadeh de $f$ é a função $\hat{f}$ que, aplicada a $A$ fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de $Z$, cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & se\, f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & se\, f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}, \tag{1.7}$$

*em que $f^{-1}(z) = \{x/f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z.*

Considerando-se uma função $f : X \to Z$, esse princípio tem por objetivo indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy $A$ de $X$ por meio de $f$. É de se esperar que esta imagem seja um subconjunto fuzzy de $Z$.

O Teorema 1.2 indica que os $\alpha$-níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos $\alpha$-níveis pela função crisp.

**Teorema 1.2** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Sejam $f : X \to Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X, com $\alpha$-níveis compactos e não vazios. Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$, vale*

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \tag{1.8}$$

**Exemplo 2** *Considere o subconjunto fuzzy A de números reais cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & se\ x \in [0, 1] \\ 0 & se\ x \notin [0, 1] \end{cases}.$$

*Os $\alpha$-níveis de A são os intervalos da forma*

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\right].$$

*Consideremos a função real $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$. Como f é estritamente crescente em [0, $\infty$[, temos*

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= \left[f(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha})), f(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha}))\right] \\ &= \left[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{1-\alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1-\alpha})^2\right] \\ &= [\hat{f}(A)]^\alpha. \end{aligned}$$

Para que possamos efetuar operações entre números fuzzy, será apresentado a seguir o Princípio de Extensão para funções com duas variáveis.

**Definição 1.9** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Sejam f: $X \times Y \to Z$ e, A e B subconjuntos fuzzy de X e Y, respectivamente. A extensão $\hat{f}$ de f, aplicada a A e B, é o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A, B)$ de Z, cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] & se\ f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & se\ f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}, \tag{1.9}$$

em que $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$.

## 1.5 Números Fuzzy

**Definição 1.10** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Um subconjunto Fuzzy $A$ é um número Fuzzy quando o conjunto universo no qual $\varphi_A(x)$ está definida é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e*

- *Todos os $\alpha$-níveis de $A$ são intervalos fechados e não vazios de $\mathbb{R}$;*
- *supp A = $\{x \in \mathbb{R}; \varphi_A(x) > 0\}$ é um conjunto limitado de $\mathbb{R}$.*

Denotaremos por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ a coleção de todos os números fuzzy, e os $\alpha$-níveis de um número fuzzy $A$ serão denotados por $[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]$.

**Observação 1.3** *Todo número real $r$ é um número fuzzy particular cuja função de pertinência é a sua função característica.*

$$\hat{r} = X_r(x) = \begin{cases} 1 & se\, x = r \\ 0 & se\, x \neq r \end{cases}.$$

**Observação 1.4** *O diâmetro de um número fuzzy $A$ no nível zero é dado por: diam$(A)$ = $a_+^0 - a_-^0$.*

Serão apresentados três tipos de números fuzzy: os triangulares, os trapezoidais e os em forma de sino.

**Definição 1.11** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Um número fuzzy $A$ é dito triangular se sua função de pertinência é da forma*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & se\, x \leq a \\ \dfrac{x-a}{u-a} & se\, a < x \leq u \\ \dfrac{x-b}{u-b} & se\, u < x \leq b \\ 0 & se\, x \geq b \end{cases}. \tag{1.10}$$

Os $\alpha$-níveis de um número fuzzy triangular têm a forma

$$[a_-^\alpha, a_+^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b],$$

para todo $\alpha \in$ [0,1].

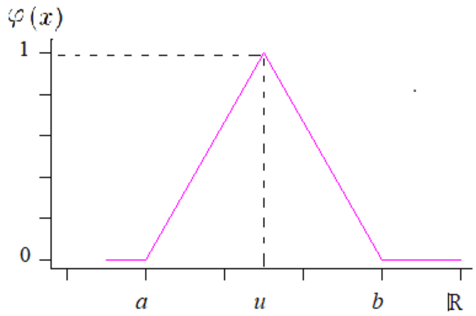


Figura 1.3 – Número fuzzy triangular.
Fonte: elaboração própria.

**Definição 1.12** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Um número fuzzy $A$ é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & se\, a \leq x < b \\ 1 & se\, b \leq x \leq c \\ \left(\dfrac{d-x}{d-c}\right) & se\, c < x \leq d \\ 0 & caso\, contrário \end{cases} . \tag{1.11}$$

Os $\alpha$-níveis do número fuzzy trapezoidal são os intervalos da forma

$$[a_-^\alpha, a_+^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d],$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

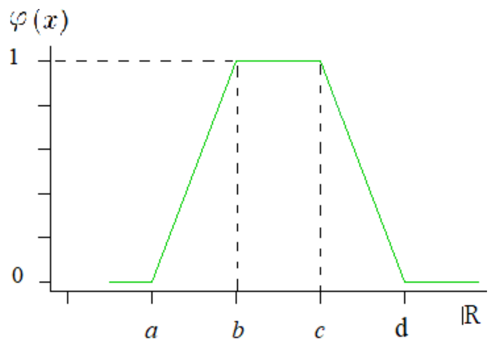


Figura 1.4 – Número fuzzy trapezoidal.
Fonte: elaboração própria.

**Definição 1.13** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de per-*

*tinência tem estas propriedades para $u, a$ e $\delta$ dados*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} exp\left(-\left(\dfrac{x-u}{a}\right)^2\right) & se\ u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0 & caso \quad contrário. \end{cases} . \tag{1.12}$$

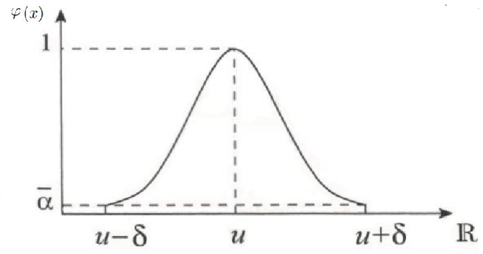


Figura 1.5 – Número fuzzy em forma de sino.
Fonte: Barros e Bassanezi (2015, p. 47).

Os $\alpha$-níveis dos números fuzzy em forma de sino são os intervalos da forma

$$[a_-^\alpha, a_+^\alpha] = \begin{cases} \left[u - \sqrt{ln\left(\dfrac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}a + \sqrt{ln\left(\dfrac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}\right] & se\ \alpha \geq \overline{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} \\ [u-\delta, u+\delta] & se\ \alpha < \overline{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} \end{cases} .$$

### 1.5.1 Operações Aritméticas com números fuzzy

As operações aritméticas para números fuzzy serão definidas a partir do Príncipio de Extensão para conjuntos fuzzy. Na verdade, são casos particulares do Princípio de Extensão em que as funções a serem extendidas são as operações usuais para números reais.

**Definição 1.14** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Sejam $A$ e $B$ dois números fuzzy e $\lambda$ um número real.*
*(a) A soma dos números fuzzy $A$ e $B$ é o número fuzzy $A \oplus B$, cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A\oplus B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & se\ \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & se\ \phi(z) = \emptyset \end{cases} , \tag{1.13}$$

em que $\phi(z) = \{(x,y) : x+y=z\}$.

(b) A *multiplicação* de $\lambda$ por $A$ é o número fuzzy $\lambda \odot A$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{\lambda\odot A}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\{x:\lambda x = z\}} [\varphi_A(x)] & se\ \lambda \neq 0 \\ \chi_0(z) & se\ \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z) & \lambda \neq 0 \\ \chi_0(z) & se\ \lambda = 0 \end{cases}, \tag{1.14}$$

em que $\chi_0$ é a função característica de $\{0\}$.

(c) A *diferença* $A \ominus B$ é o número fuzzy cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A\ominus B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & se\ \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & se\ \phi(z) = \emptyset \end{cases}, \tag{1.15}$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) : x - y = z\}$.

(d) A *multiplicação* de $A$ por $B$ e o número fuzzy $A.B$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A.B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & se\ \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & se\ \phi(z) = \emptyset \end{cases}, \tag{1.16}$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) : x.y = z\}$.

(d) A *divisão* é o número fuzzy $A/B$ cuja função de pertinência é

$$\varphi_{A/B}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & se\ \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & se\ \phi(z) = \emptyset \end{cases}, \tag{1.17}$$

em que $\phi(z) = (x, y) : x/y = z$.

As operações entre números fuzzy são obtidas de modo prático com a extensão das operações aritméticas intervalares, pelo teorema a seguir:

**Teorema 1.5** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Os $\alpha$-níveis do conjunto fuzzy $A \otimes B$ são dados por*

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha$$

*para todo $\alpha \in [0, 1]$, sendo $\otimes$ qualquer uma das operações aritméticas entre intervalos fechados.*

**Proposição 1.6** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) Sejam $A$ e $B$ números fuzzy com $\alpha$-níveis dados,respectivamente, por $[A]^\alpha = [a^\alpha_-, a^\alpha_+]$ e $[B]^\alpha = [b^\alpha_-, b^\alpha_+]$. Então valem as seguintes propriedades:*
*(a) A soma entre $A$ e $B$ é o número fuzzy $A \oplus B$ cujos $\alpha$-níveis são*

$$[A \oplus B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a^\alpha_- + b^\alpha_-, a^\alpha_+ + b^\alpha_+].$$

*(b) A diferença entre $A$ e $B$ é o número fuzzy $A \ominus B$ cujos $\alpha$-níveis são*

$$[A \ominus B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_-^\alpha - b_+^\alpha, a_+^\alpha - b_-^\alpha].$$

*(c) A multiplicação de $\lambda$ por A é o número fuzzy $\lambda \odot A$ cujos $\alpha$-níveis são*

$$[\lambda \odot A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [\lambda a_-^\alpha, \lambda a_+^\alpha] & se\, \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

*(d) A multiplicação de $A$ por $B$ é o número fuzzy $A.B$ cujos $\alpha$-níveis são*

$$[A.B]^\alpha = [A]^\alpha [B]^\alpha = \{minP, maxP\},$$

*em que $P = \{a_-^\alpha b_-^\alpha, a_-^\alpha b_+^\alpha, a_+^\alpha b_-^\alpha, a_+^\alpha b_+^\alpha\}$*

*(e) A divisão de $A$ por $B$, se 0 $\notin suppB$, é o número fuzzy cujos $\alpha$-níveis são*

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]\left[\frac{1}{b_+^\alpha}, \frac{1}{b_-^\alpha}\right].$$

**Definição 1.15** *(BARROS; BASSANEZI, 2015) (Diferença de Hukuhara: A $\ominus_H$ B). Sejam $A$ e $B$ dois números fuzzy. Se existir um número fuzzy $C$ tal que $A = B \oplus C$, então* **C** *é chamado de Diferença de Hukuhara de $A$ e $B$ e a denotamos por A $\ominus_H$ B. Em $\alpha$-níveis, isto equivale a dizer que*

$$[A \ominus_H B]^\alpha = [a_-^\alpha - b_-^\alpha, a_+^\alpha - b_+^\alpha] \quad para\ todo\ \alpha \in [0, 1].$$

*Como*

$$[A \ominus B]^\alpha = [a_-^\alpha - b_+^\alpha, a_+^\alpha - b_-^\alpha],$$

*segue que*

$$A \ominus B = A \ominus_H B \Leftrightarrow b_-^\alpha = b_+^\alpha$$

*ou seja,*

$$A \ominus B = A \ominus_H B \Leftrightarrow B \in \mathbb{R}.$$

Um ponto importante é que, utilizando a diferença de Hukuhara, a diferença de um número fuzzy por ele mesmo é igual a $\{0\}$. Essa diferença foi utilizada para se estudar, pela primeira vez, a derivada de funções a valores fuzzy.

## 1.6 Números fuzzy linearmente correlacionados

Para a introdução da derivada fuzzy linearmente correlacionada, que é um novo conceito de diferenciabilidade, apresenta-se a seguir algumas definições consideradas básicas, que formarão a aritmética, para o cálculo de tal derivada (BARROS; SIMÕES, 2017).

**Definição 1.16** *(BARROS; SIMÕES, 2017) Dois números fuzzy $A$ e $B$ são ditos linearmente correlacionados se existir $q$ , $r \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$, tais que $[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Nesse caso escrevemos $B = qA + r$.*

**Exemplo 3** *Sejam $A, B$ e $C \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ em que seus $\alpha$-níveis são dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [\alpha, 2-\alpha], [B]^\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$ e $[C]^\alpha = [2\alpha, 5-\alpha]$. Os números fuzzy $B$ e $A$ são linearmente correlacionados, pois $\exists\ q = 2,\ r = -1 \in \mathbb{R}$, tais que, a igualdade $[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$ é verificada, para todo $\alpha \in [0,1]$. Já os números fuzzy $C$ e $A$, não são linearmente correlacionados, pois não existem $q$ e $r$ que satisfaçam a igualdade $[C]^\alpha = q[A]^\alpha + r$ para todo $\alpha \in [0,1]$.*

**Definição 1.17** *(BARROS; SIMÕES, 2017) Se $A$ e $B$ são números fuzzy linearmente correlacionados, a adição e a subtração linearmente correlacionadas são definidas, respectivamente por:*

*i)* $A +_L B = \{a + b; a \in A, b = qa + r,$ *com* $q, r \in \mathbb{R}$ *e* $q \neq 0\}$,

*ii)* $A -_L B = \{a - b; a \in A, b = qa + r,$ *com* $q, r \in \mathbb{R}$ *e* $q \neq 0\}$.

## 1.7 Função e Derivada Fuzzy

Como apresentado por Simões (2017), a noção de derivada fuzzy é o ponto principal para o desenvolvimento de uma teoria de equações diferenciais fuzzy. A questão fundamental para definirmos a derivada de uma função a valores fuzzy é a diferença $F(t+h) - F(t)$.

Utilizando a noção de diferença para números fuzzy linearmente correlacionados, o $\alpha$-nível de $F(t+h) -_L F(t)$ é dado por $[F(t+h) -_L F(t)]^\alpha = (q-1)[F(t)]^\alpha + r$.

As expressões "$F(t+h)$" e "$F(t)$" formam um processo autocorrelacionado, ou seja, os valores representados por tais expressões são interdependentes. Isso significa que o valor futuro $F(t+h)$ está relacionado com o valor presente $F(t)$. Esse processo autocorrelacionado é estabelecido por meio de uma função à valores fuzzy.

**Definição 1.18** *(BARROS; SIMÕES, 2017) Uma função a valores fuzzy ou simplesmente função fuzzy é uma correspondência*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$$

*que para cada $t \in [a,b]$ associa um único $F(t) \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$.*

Os $\alpha$-níveis dessa função são denotados por: $[F(t)]^\alpha = [f_-^\alpha(t), f_+^\alpha(t)]$, para todo $\alpha \in [0,1]$.

Em seguida serão apresentadas duas formas de se calcular a derivada de uma função a valores fuzzy considerando-se dois tipos de diferença entre números fuzzy.

### 1.7.1 Derivada de Hukuhara

**Definição 1.19** *(PURI; RALESCU, 1983) Uma função $F : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é Hukuhara diferenciável em $t_0$ se os limites*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus_H F(t_0)}{h} \quad e \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus_H F(t_0 - h)}{h} \tag{1.18}$$

*existem e são iguais a algum elemento $D_H F(t_0)$ que pertence a $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. O número fuzzy $D_H F(t_0)$ é chamado de H-derivada de F em $t_0$.*

**Teorema 1.7** *(KALEVA, 1987) Se $F : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é Hukuhara diferenciável, então $f_-^\alpha(t)$ e $f_+^\alpha(t)$ são diferenciáveis e*

$$[D_H F(t_0)]^\alpha = [(f_-^\alpha)'(t), (f_+^\alpha)'(t)],$$

*para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

A derivada de Hukuhara fornece soluções com diâmetro crescente, ao longo do tempo, indicando aumento de incerteza. Devido à esta limitação, essa derivada não é indicada para problemas em que se espera incerteza decrescente ao longo do tempo, como em modelos de decaimento populacional.

### 1.7.2 Derivada Fuzzy Linearmente Correlacionada

A derivada linearmente correlacionada (L-derivada) é uma noção de diferenciabilidade para funções à valores fuzzy, sendo indicada para processos fuzzy autocorrelacionados localmente $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, para cada h com valor absoluto suficientemente pequeno

$$F(t + h) = q(h)F(t) + r(h)$$

para todo t $\in [a, b]$, sendo que $q(h), r(h) \in \mathbb{R}$.

**Definição 1.20** *(BARROS;SIMÕES, 2017) Seja $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função a valores fuzzy e para cada h, com valor absoluto suficientemente pequeno, sejam $F(t_0 + h)$ e $F(t_0)$ com $t_0$ $\in [a, b]$ números fuzzy linearmente correlacionados. A função $F$ é dita ser L-diferenciável em $t_0$ se existir um número fuzzy $D_L F(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) -_L F(t_0)}{h} \tag{1.19}$$

*exista e seja igual a $D_L F(t_0)$. O número fuzzy $D_L F(t_0)$ é chamado derivada fuzzy linearmente correlacionada de $F$ em $t_0$, ou L-derivada.*

Por meio do Teorema 1.8, que deriva da Definição 1.20, nota-se que para determinado $q(h)$, o cálculo da L-derivada recai no cálculo da derivada de Hukuhara.

**Teorema 1.8** *(BARROS;SIMÕES, 2017) Seja $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função L-diferenciável no ponto $t_0 \in [a,b]$ com $[F(t_0)]^\alpha = [f_-^\alpha(t_0), f_+^\alpha(t_0)]$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Então, as funções $f_-^\alpha(t)$ e $f_+^\alpha(t)$ são diferenciáveis no ponto $t_0$ e, para todo $h$ com valor absoluto suficientemente pequeno, temos*

$$[D_L F(t_0)]^\alpha = \begin{cases} \left[(f_-^\alpha)'(t_0), (f_+^\alpha)'(t_0)\right] & se \;\; q(h) \geq 1 \\ \\ \left[(f_+^\alpha)'(t_0), (f_-^\alpha)'(t_0)\right] & se \;\; 0 < q(h) < 1 \\ \\ \left[(f_-^\alpha)'(t_0), (f_-^\alpha)'(t_0)\right] & se \;\; q(h) \leq 0 \end{cases} . \tag{1.20}$$

**Observação 1.9** *(BARROS;SIMÕES, 2017) Se $q(h) \geq 1$, tem-se incerteza crescente, e a solução coincide com a obtida pela derivada de Hukuhara.*

Assim, “o aparente defeito não esta na derivada de Hukuhara e sim, em seu uso para modelar fenômenos em que espera-se incerteza decrescente”(BARROS; SIMÕES; ESMI, 2018, p.5).

**Observação 1.10** *Se $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é L-diferenciável em $[a,b]$, então para cada $\alpha \in [0,1]$, temos:*
*i) Se $q > 1$, o diam$[F(t)]^\alpha$ é uma função crescente(F é expansiva);*
*ii) Se $0 < q \leq 1$, o diam$[F(t)]^\alpha$ é uma função decrescente(F é contrativa);*
*iii) Se $q < 0$, o diam$[F(t)]^\alpha$ é uma função constante.*

**Exemplo 4** *Seja $F : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por $[F(t)]^\alpha = [t(2\alpha - 1), t(2-\alpha)]$. Vamos calcular a L-derivada no ponto $t_0 \in (0,5)$. A função $F$ é linearmente correlacionada pois, para todo $h$ suficientemente pequeno, satisfaz*

$$F(t+h) = q(h)F(t) + r(h)$$

$$[(t+h)(2\alpha - 1), (t+h)(2-\alpha)] = q(h)[t(2\alpha - 1), t(2-\alpha)] + r(h),$$

*com $q(h) = \dfrac{t+h}{t} > 1$ e $r(h) = 0$. Portanto, $F$ é linearmente correlacionada.*
*Calculemos então a L-derivada:*

$$F_L'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) -_L F(t_0)}{h}$$

$$\begin{aligned} [F_L'(t_0)]^\alpha &= \lim_{h \to 0} \frac{[h(2\alpha - 1), h(2-\alpha)]}{h} \\ &= [2\alpha - 1, 2 - \alpha]. \end{aligned}$$

*Portanto, $F_L'(t_0) = (-1; 1; 2)$.*

# 2 Dinâmica dos Fundos de pensão

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2015, p.139), importantes mudanças na estrutura na demografia da população brasileira têm ocorrido nos últimos anos. O Brasil está em uma fase da transição demográfica, onde são observadas baixas taxas de fecundidade e mortalidade, ou seja, as pessoas estão passando a ter uma maior expectativa de vida e, em contrapartida, a proporção de idosos na população está aumentando, o que pode trazer problemas ao sistema previdenciário vigente. O sistema previdenciário brasileiro é baseado no regime de repartição simples, que consiste na ideia de que os trabalhadores ativos financiam a aposentadoria dos aposentados. Como a proporção de idosos está cada vez maior, a previdência tende a ter uma sobrecarga de benefícios à pagar, e a quantidade de trabalhadores ativos pode não conseguir financiar as aposentadorias, pelo regime de repartição simples.

Esse cenário apresentado justifica o crescimento da previdência complementar no país, pois os trabalhadores passam a buscar formas de garantir um valor de aposentadoria mais confortável ao fim de sua vida laboral. As entidades de previdência complementar fazem parte do setor de previdência privada e podem ser divididas em fechadas ou abertas, sendo que a principal diferença entre elas diz respeito à quem pode adquirir e participar do planos de benefícios oferecidos. Qualquer pessoa pode contratar um plano de benefício oferecido por uma entidade aberta de previdência complementar, já para adesão à planos por meio de entidades fechadas, deve-se existir algum vínculo empregatício ou associativo entre o indivíduo e determinada empresa ou associação, para a constituição de um fundo de pensão. Os fundos de pensão são caracterizados por ser entidades fechadas de previdência complementar, e têm por objetivo proporcionar ao trabalhador, no fim de sua vida laboral, um complemento à renda obtida com sua aposentadoria.

Os fundos são geridos por instituições que estão expostas à diversos riscos e incertezas em todo o processo de gestão dos recursos. O principal risco enfrentado por essas instituições é o risco de mercado, ou seja, a possibilidade de perda devido a mudanças nos preços ou parâmetros de mercado. Referindo-se aos fundos de pensões, o risco de mercado se torna visível quando existe a "impossibilidade de acumular e/ou manter recursos compatíveis com os compromissos assumidos para com os seus participantes"(RODRIGUES, 2008, p.20).

Como apresentado por Pinheiro (2007), as variáveis que influenciam a situação financeira e atuarial dos planos de benefícios, oferecidos pelos fundos de pensão, podem ser de ordem econômica, demográfica, dentre outras. Este trabalho trata-se de uma análise financeira do problema considerando apenas variáveis econômicas, como a taxa de juros e de inflação, que influenciam os ganhos com os investimentos. Esses investimentos dizem respeito à aplicação das parcelas pagas pelos participantes dos planos do fundo de pensão, em certos segmentos de aplicação como, em títulos de renda variável ou títulos de renda fixa.

A atuação dos fundos de pensão pode ser dividida em dois períodos: o de acumulação e o de pagamento. O primeiro inicia-se com a adesão do indivíduo ao plano e vai até a aposentadoria (ou até a geração de pensão por morte), e é durante este período que é acumulado o valor para o pagamento do plano benefício, por meio dos investimentos. Já o segundo, é a fase de pagamento do plano benefício, e vai da aposentadoria até o falecimento do participante ou de seu beneficiário.

Os tipos de planos de benefícios oferecidos são divididos, basicamente, em dois: plano de benefício definido (BD) e plano de contribuição definida (CD). No primeiro, as parcelas que serão pagas pelo plano e o valor do benefício que será recebido são previamente estabelecidos, sendo que as parcelas sofrem reajustes anuais. No segundo, apenas as parcelas pagas na fase de acumulação são previamente definidas, sendo que o montante acumulado é incerto (RODRIGUES, 2008, p.19). Os fundos de pensão podem utilizar dois métodos de acumulação, para conseguir as provisões necessárias para o pagamento dos planos de benefícios: o regime de repartição simples ou de capitalização.

A Figura 2.1 ilustra a forma de constituição de reservas em planos CD, em que os contribuintes, formados por trabalhadores e empresários, fazem contribuições ao fundo por intermédio das entidades fechadas de previdência complementar. Essas entidades gestoras do fundo de pensão ficam responsáveis por investir os recursos de forma a garantir a melhor rentabilidade possível, e os ganhos obtidos são depositados em contas individuais dos participantes do fundo.

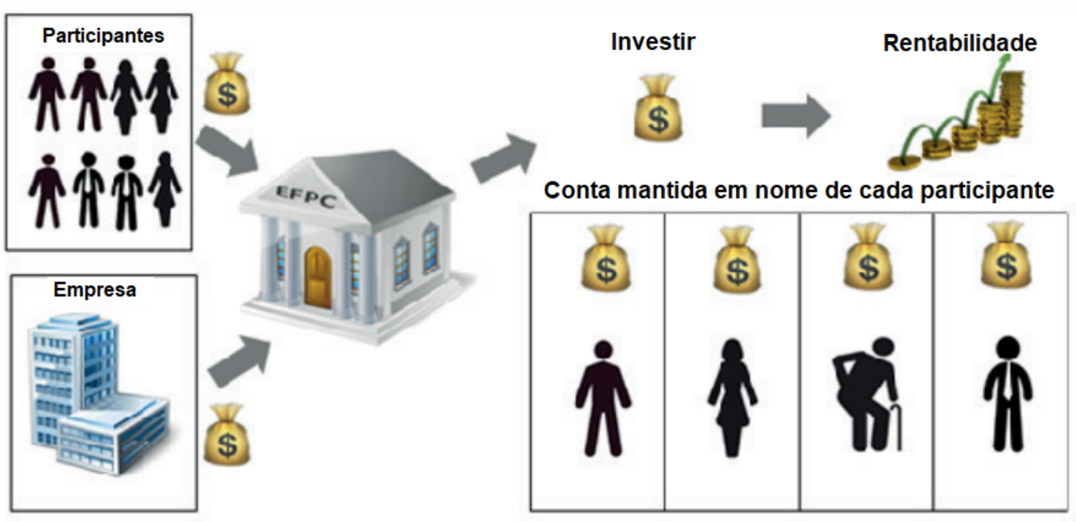


Figura 2.1 – constituição de reservas em planos CD
Fonte: ABRAPP (2018, p.14)

Como apresentado anteriormente, um fundo de pensão lida diretamente com diversos riscos, que consistem na probabilidade de perda de recursos, em todo seu processo de gestão. O investimento no desenvolvimento de técnicas que permitam melhorar a dinâmica e o funcionamento dessas instituições tende a ser de grande importância e interesse para o mercado. Diversos trabalhos são desenvolvidos tentando contribuir de diferentes formas com o aperfeiçoamento da gestão de recursos dos fundos de pensão.

Nesse sentido Motta e Rocha (2002), consideraram alguns parâmetros de risco como, a taxa de inflação e de crescimento salarial, com o objetivo de obter um modelo estocástico, que estime o valor a ser acumulado por um fundo de pensão, para que se estabeleça o equilíbrio financeiro e atuarial. Para atingir tal objetivo utilizaram o método de simulação Monte Carlo, por meio do qual consegue-se avaliar o problema considerando-se diferentes cenários. A principal conclusão obtida nesse estudo foi que a escolha dos parâmetros a serem considerados no modelo, e as características de cada plano, são fatores de grande influência na formação das reservas matemáticas para o pagamento dos benefícios. Com o mesmo objetivo, Oliveira (2014), desenvolve uma análise econométrica utilizando dados de rentabilidade de determinado fundo de pensão. Essa análise consiste em obter uma previsão da rentabilidade do fundo que é utilizada para estimar o valor do fundo de pensão em determinado tempo.

Percebe-se por meio desses trabalhos que existem pelo menos dois pontos importantes que são fontes de estudo relativos à previsão do valor acumulado por um fundo de pensão, sob a ótica financeira. Um diz respeito a necessidade de se manter o equilíbrio entre os ativos e as obrigações assumidas, outro é em relação ao valor do rendimento obtido com a aplicação dos recursos, que é determinado pelo valor da taxa de rendimento dos investimentos.

Como apresentado por Penna e Moraes (2000), deve-se procurar estabelecer "taxas justas"de contribuição, no sentido de não gerar déficit nem mesmo superavit de reserva matemática acumulada. Este trabalho tem por objetivo, analisar o período de acumulação para planos CD, considerando o regime de capitalização, por meio do modelo de capitalização contínua. A análise será feita utilizando a lógica fuzzy, permitindo-se assim, incorporar ao problema parte da incerteza presente no processo de acumulação.

A poupança gerada em determinado instante $\hat{t}$ do período de acumulação é dependente de muitas variáveis, como as citadas anteriormente. Essa poupança é formada pelo pagamento de valores fixos (parcelas) em planos CD, e também pela rentabilidade dos investimentos que depende de variáveis incertas como as taxas de juros e de inflação. Portanto, analisando a situação no presente, tem-se um processo de geração de poupança que fornecerá uma capital incerto, e é este montante incerto que assumiremos como a condição inicial incerta para um problema de valor inicial fuzzy.

# 3 Fundos de Pensão e Modelagem Fuzzy

O problema de valor inicial fuzzy para o modelo de capitalização contínua permite-nos modelar o processo de incorporação de juros ao capital (C), considerando uma taxa de correção contínua para o juros $(\lambda)$ e uma condição inicial $(C_0)$, por determinado período de tempo, ou seja

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \lambda C \\ C(0) = C_0 \end{cases} . \tag{3.1}$$

## 3.1 Condição inicial clássica

Considerando-se o caso clássico, para uma condição inicial $C_0$, a solução do Problema 3.1 é dada por

$$C(t) = C_0 e^{\lambda t}. \tag{3.2}$$

A figura 3.1 ilustra a solução clássica para o PVI do modelo de capitalização contínua. Considerando $\lambda$ como a taxa anual de rendimento dos investimentos e fazendo a condição inicial $C_0 = C_{\hat{t}}$, que é o capital acumulado em determinado instante $\hat{t}$ do período de acumulação, obtém-se uma curva exponencial demonstrando o aumento cresencente de capital ao longo do período.

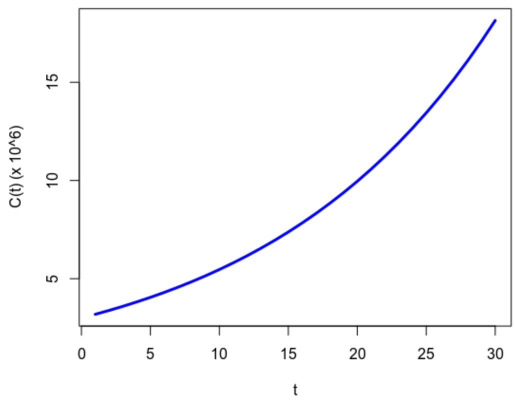


Figura 3.1 – Representação gráfica da solução clássica $C(t)$ do PVI 3.1 com $\lambda = 0,06$ e condição inicial $C_{\hat{t}} = 3 \times 10^6$.

A condição inicial do PVI, que neste estudo é o valor acumulado pelo fundo em um instante $\hat{t}$, é uma variável que depende de muitos fatores como apresentado anteriormente. Portanto, a realização da análise por meio da teoria de conjuntos fuzzy pode permirtir a incorporação dessas incertezas ao modelo de capitalização contínua, para a obtenção de uma solução mais abrangente e que se ajuste às necessidades e características do fundo de pensão.

### 3.1.1 Taxa instantânea de capitalização

A taxa $\lambda$ considerada no problema 3.6 é a taxa instantânea de capitalização, que pode ser obtida por meio da relação entre taxa de juros nominal e taxa efetiva de juros (GARCIA; SIMÕES, 2010). Uma taxa é considerada efetiva quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele à que a taxa está referida, e é nominal quando estão em diferentes unidades de tempo.

Considerando-se $n$ como o número de capitalizações no período e uma taxa nominal $i_n$, a taxa efetiva anual $i$ é obtida por meio de

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1. \tag{3.3}$$

Para a obtenção da taxa instantânea de juros, que será utilizada no modelo de capitalização contínua, consideram-se períodos infinitos de capitalização, pois essas capitalizações são realizada a cada instante $t$, pode-se então fazer $n$ tender ao infinito onde obtém-se

$$i = e^{\lambda} - 1, \tag{3.4}$$

ou

$$\lambda = ln(1 + i), \tag{3.5}$$

Sendo $\lambda$, a taxa instantânea de juros.

Para a análise do valor acumulado pelo fundo de pensão considera-se que o rendimento dos investimentos é dado por essa taxa instantânea de juros. São incorporados às parcelas pagas pelo participante do fundo, os rendimentos obtidos nas aplicações, formando a poupança necessária para pagamento do plano de benefício.

## 3.2 Condição inicial fuzzy

Iremos considerar que o Sistema 3.1 modele o período de acumulação para os planos de benefícios CD, sendo que a condição inicial $C_0$ será substituída por $C_{\hat{t}}$ que representará o valor que é acumulado pelo fundo em determinado tempo $\hat{t}$, para o pagamento do benefício ao participante. A taxa de correção $\lambda$, representará o rendimento do investimento, ou seja, a taxa de juros que incide sobre as contribuições do beneficiário do plano. Como o montante no instante $\hat{t}$

do período de acumulação é uma variável com certo grau de incerteza, iremos fazer esta análise via teoria fuzzy, utilizando o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \lambda C, \ \lambda > 0 \\ C(\hat{t}) = C_{\hat{t}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} . \tag{3.6}$$

O parâmetro $\lambda$ é um número real positivo e representa a taxa de rentabilidade do investimento onde são aplicadas as contribuições dos participantes do plano, e a condição inicial representa o montante obtido no instante $\hat{t}$ do período de acumulação do plano CD. Para a análise do Problema 3.6 a condição inicial será considerada incerta, sendo modelada por um número fuzzy. O parâmetro que representa a taxa de rentabilidade será dado pela taxa instantânea de capitalização, que será apresentada a seguir.

Ao assumirmos que a condição inicial será modelada por um número fuzzy estamos considerando que o processo de obtenção do montante para o instante $\hat{t}$ do período de acumulação é permeado de incertezas. Parte-se do pressuposto de que esse montante é composto pelas parcelas fixas pagas pelos participantes do fundo de pensão, e também pelo ganho incerto obtido nos investimentos que são incorporados ao capital inicial.

Para a análise do modelo aplica-se o conceito de derivada fuzzy linearmente correlacionada, que é indicada para processos fuzzy autocorrelacionados, ou seja, para funções que para cada número real associam um número fuzzy. E além disso se, para todo h com valor absoluto suficientemente pequeno, consegue-se estabelecer a seguinte relação

$$[C(t+h)]^{\alpha} = q(t)[C(t)]^{\alpha} + r(h). \tag{3.7}$$

Isso significa que o montante $C$ em um instante $t + h$ está relacionado com o montante $C$ em um instante anterior $t$. Sendo que os $\alpha$-níveis da função C(t) são denotados por $[C(t)]^{\alpha} = [C^{\alpha}_{-}(t), C^{\alpha}_{+}(t)]$, para $\alpha \in [0, 1]$.

Admitindo que a solução é um processo fuzzy linearmente correlacionado, e que a equação 3.7 seja satisfeita para um valor $q(h) > 1$, temos que $C(t + h) > C(t)$, ou seja, o valor futuro acumulado por um fundo de pensão aumenta com o passar do tempo. Utilizando o Teorema 1.8, temos que, para cada $\alpha \in [0, 1]$ devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} [C^{\alpha}_{-}(t), C^{\alpha}_{+}(t)]' = & \lambda[C^{\alpha}_{-}(t), C^{\alpha}_{+}(t)] \\ \quad C_{\hat{t}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad e & \qquad \lambda > 0 \end{cases} . \tag{3.8}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (C^{\alpha}_{-})'(t) = \lambda C^{\alpha}_{-}(t), \ com \quad C^{\alpha}_{-}(\hat{t}) = C^{\alpha}_{\hat{t}-} \\ (C^{\alpha}_{+})'(t) = \lambda C^{\alpha}_{+}(t), \ com \quad C^{\alpha}_{+}(\hat{t}) = C^{\alpha}_{\hat{t}+} \end{cases} , \tag{3.9}$$

que para cada $\alpha \in [0,1]$, obtêm-se como solução

$$\begin{cases} C_-^\alpha(t) = C_{\hat{t}-}^\alpha e^{\lambda t} \\ C_+^\alpha(t) = C_{\hat{t}+}^\alpha e^{\lambda t} \end{cases}. \tag{3.10}$$

Observa-se que para cada valor de $t$ fixo, obtém-se um número fuzzy diferente, e cada número fuzzy representa o valor acumulado pelo fundo de pensão naquele instante $t$. Além disso, o diâmetro de C(t) dado por

$$diam(C) = C_{\hat{t}+}^0 e^{\lambda t} - C_{\hat{t}-}^0 e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(C_{\hat{t}+}^0 - C_{\hat{t}-}^0)$$

é crescente para todo $\lambda > 0$ e $t > 0$, o que apresenta concordância com o problema estudado. O valor acumulado por fundos de pensão tende a ser maior, quanto maior o tempo de contribuição ao plano de benefício, pois mais juros serão reincididos sobre as parcelas pagas.

Para a obtenção da condição inicial e da taxa de rendimento, foram utilizados dados de um consolidado histórico de fundos de investimento (AMBIMA, 2019). A condição inicial foi obtida com base no valor do patrimônio líquido de fundos de investimento dos últimos dez anos, que em média foi de, aproximadamente, $R\$3$ milhões. Utilizando o desvio padrão entre os valores da amostra de dados, que foi cerca de $R\$1,2$ milhões, obtém-se o seguinte número fuzzy triangular:

$$[C_{\hat{t}}]^\alpha = [1200000\alpha + 1800000, -1200000\alpha + 4200000].$$

O valor para a taxa $\lambda$ foi obtido por meio de uma média ponderada entre a rentabilidade de fundos de investimento de renda fixa e de ações de índice ativo, considerando os pesos de 80% e 20%, respectivamente. A Figura 3.2 ilustra o comportamento geométrico de 3.10 considerando $\lambda = 0,06$ e condição inicial dada por um número fuzzy triangular, cujos $\alpha-$níveis são dados por $[C_{\hat{t}}]^\alpha = [1200000\alpha + 1800000, -1200000\alpha + 4200000]$.

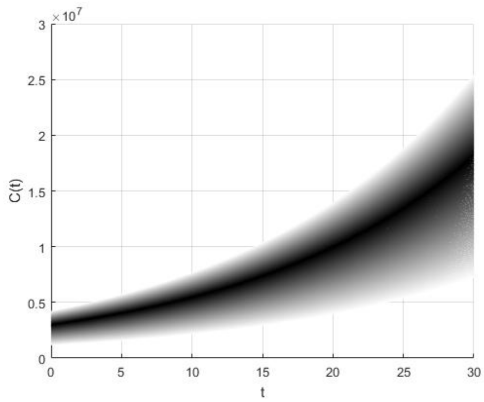


Figura 3.2 – Representação gráfica da solução fuzzy $C(t)$ do PVIF 3.6 no plano $C(t)$ com $q(h) > 1, \lambda = 0,06$ e condição inicial $[C_{\hat{t}}]^\alpha = [1200000\alpha + 1800000, -1200000\alpha + 4200000]$.

Nota-se que, se a condição inicial for dada por um número real, isto é, $C^{\alpha}_{\hat{t}-} = C^{\alpha}_{\hat{t}+} = C_0$, para todo $\alpha \in [0,1]$, então a solução 3.6 coincide com a solução clássica, ou seja

$$C(t) = C_0 e^{\lambda t}.$$

Além disso, essa solução é preferida no sentido de que para cada $t > 0$, ela pertence a solução fuzzy 3.10 com grau de pertinência igual a 1. A Figura 3.3 apresenta a solução fuzzy no espaço-$Ct\alpha$.

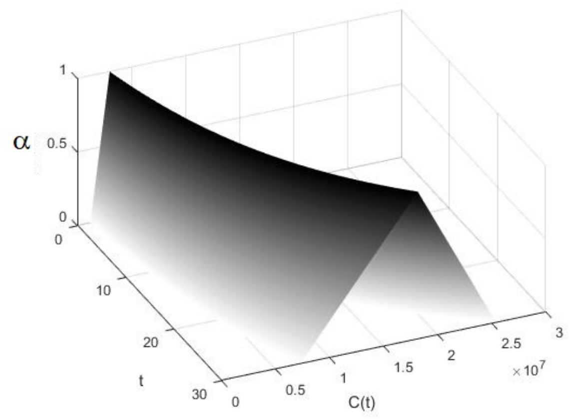


Figura 3.3 – Representação gráfica da solução fuzzy $C(t)$ do PVIF 3.6 no espaço-$Ct\alpha$ com $q(h) > 1, \lambda = 0,06$ e condição inicial $[C_{\hat{t}}]^{\alpha} = [1200000\alpha + 1800000, -1200000\alpha + 4200000]$.

Em ambas as figuras os maiores e menores valores de associação são representados respectivamente pelas cores preto e branco. A forma do gráfico na Figura 3.2 é justificada pelo aumento do diâmetro da solução ao longo do tempo.

Nota-se ainda que, para diferentes valores de tempo $t$ de aplicação do capital (que seriam as parcelas pagas pelos participantes do plano), obtém-se um número fuzzy triangular diferente, que por sua vez fornece um subconjunto fuzzy de valores de C(t) para todo grau de pertinência $\alpha \in [0,1]$. Portanto, para a obtenção de um capital de interesse a ser acumulado por um fundo de pensão, deve-se determinar o instante $t$, e também fixar um valor para $\alpha$. De acordo com a escolha destes valores, juntamente com a escolha da taxa $\lambda$ e da condição inicial $C_{\hat{t}}$, obtém-se uma solução que represente uma aproximação do valor que deve ser acumulado pelo fundo de pensão.

# 4 Considerações Finais

Como apresentado inicialmente, os fundos de pensão são de grande importância para a economia brasileira, contribuindo com cerca de 13% do PIB do país. Entretanto, essas instituições estão expostas à diversos tipos de riscos que podem torná-las incapazes de cumprir com sua principal obrigação: pagar os planos de benefícios contratados por meio do acúmulo de uma reserva financeira e atuarial equilibrada.

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma análise acerca da incerteza presente na fase de acumulação dos planos de contribuição definida, utilizando conjuntos fuzzy. Para a análise, utilizou-se um PVIF adotando o modelo de capitalização contínua e a condição inicial incerta, sendo modelada por um número fuzzy. Considerou-se ainda que o parâmetro $\lambda$ do modelo de capitalização contínua representasse a variável rentabilidade dos investimentos.

O solução do PVIF foi obtida pela aplicação da L-derivada, uma derivada fuzzy indicada para processos fuzzy autocorrelacionados. A solução obtida em 3.10, apresenta diâmetro crescente ao longo do tempo. Para cada valor de $t$ fixo, obtém-se um número fuzzy diferente, e cada número fuzzy representa o valor acumulado pelo fundo naquele instante $t$. Portanto, para a obtenção de um capital de interesse a ser acumulado, deve-se determinar o instante $t$, e também fixar um valor para $\alpha$.

Este trabalho limitou-se à exploração financeira do problema do valor acumulado por fundos de pensão, por meio de uma análise determinística, incluindo a lógica fuzzy. Reconhece-se o fato de que a adoção de premissas atuariais é de grande importância para problemas como este, pois envolvem expectativas de vida e probabilidades diversas. Como propostas de complementar tal estudo, pode-se ser adicionada ao modelo variáveis de premissas atuariais que possam trazer cada vez mais o problema analisado para a realidade enfrentada no gerenciamento dos fundos de pensão.

# Bibliografia

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS (AMBIMA). **Consolidado Histórico de Fundos de Investimento**. Disponível em: http://www.anbima.com.br Acesso em: 02 jun. 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR(ABRAPP). **Consolidado Estatístico**. Disponível em: http://www.abrapp.org.br Acesso em: 06 abr.2019.

BARROS,L,C.;BASSANEZI,R,C.**Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**.3 ed.Campinas, SP:UNICAMP/IMECC, 2015.

BARROS, L. C.; SIMÕES, F.S.P. Fuzzy differential equations with interactive derivative. **Fuzzy sets and systems**, v. 309, p. 64-80, 2017.

BARROS,L.C.; SIMÕES,F.S.P.; ESMI,E. **Modelos de dinâmica populacional para processos fuzzy autocorrelacionados.** Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics.v.6, n.1, 2018.

BASSANEZI,R,C.;FERREIRA,W,C.**Equações Diferenciais com Aplicações**.1 ed.São Paulo, SP:Harbra, 1988.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**, 1988. Disponível em: https://www.senado.leg.br Acesso em: 30 mar. 2019.

GARCIA, J.A; SIMÕES, O,A. **Matemática Actuarial Vida e Pensões**. Coimbra: Almedina, 2010.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Mudança demográfica no Brasil no início do século XXI**. Dísponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br Acesso em:

21 jun 2019.

KALEVA, O. Fuzzy differential equations. **Fuzzy sets and systems**, Elsevier, v. 24, n. 3, p. 301–317, 1987.

MOTTA, L. F. J; ROCHA, C. B. Passivo atuarial estocástico de fundos de pensão: uma ferramenta necessária ao equilíbrio de longo prazo entre ativos/investimentos e passivos. In:**Congresso BALAS**, Rio de Janeiro. 2002.

OLIVEIRA, Marta Alexandra Azevedo. **Análise e previsão do valor acumulado de um fundo de pensões**. 2014. Tese de Doutorado.

PENNA, A. F. S; MORAES, M. A. S. **Um modelo quantitativo de um fundo de capitalização**. Revista de Administração; Universidade de São Paulo, v. 36, n. 1, 2001.

PINHEIRO, R. P. **A demografia dos fundos de pensão**. Ministério da Previdência Social, Secretaria de Políticas de Previdência Social, 2007.

PURI, M. L.; RALESCU, D. A. Differentials of fuzzy functions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 91, n. 2, p. 552–558, 1983.
RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.

SIMÕES, F.S.P. **Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de população**. Tese(Doutorado em Matemática Aplicada)- Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas.Campinas, 2017.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p.338-353, 1965.