

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

**GUSTAVO SALVIOLI DA SILVA**

**DINÂMICA DA OFERTA E PREÇO FUZZY**

Varginha-MG

2019

GUSTAVO SALVIOLI DA SILVA

**DINÂMICA DA OFERTA E PREÇO FUZZY**

Trabalho de conclusão de Piepex apresentado ao Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Alfenas como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Economia. Área de Concentração: economia.

Orientador: Sílvio Antônio Bueno Salgado

Varginha-MG

2019

GUSTAVO SALVIOLI DA SILVA

**DINÂMICA DA OFERTA E PREÇO FUZZY**

Trabalho de conclusão de Piepex apresentado ao Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Alfenas como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Economia.

Trabalho aprovado em: 16/12/2019

Prof.: Sílvio Antônio Bueno Salgado

Instituição: UNIFAL-MG (ICSA)

---

Prof.: Danilo Machado Pires

Instituição: UNIFAL-MG (ICSA)

---

Prof.: Felipe Andrade Velozo

Instituição: UNIFAL-MG (ICSA)

---

## RESUMO

Grandes quantidades de produtos e serviços são transacionados e produzidos todos os dias em uma economia e devido a esse volume existe uma imprecisão em determinar de forma exata tudo o que está acontecendo. Assim, para realizar uma análise desses dados se deve utilizar ferramentas que sejam capazes de reconhecer essas imprecisões. Por esses e outros motivos se aplica a Lógica Fuzzy relacionada aos números fuzzy, para não ser analisado apenas um valor, mas um intervalo que seja capaz de capturar a imprecisão dos dados (KAHRAMAN; KAYA, 2010). O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento do preço e da oferta considerando incerteza no parâmetro, aplicando a Lógica Fuzzy por meio da aplicação das Equações diferenciais da Oferta e Preço na resolução de um Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) pelo princípio de extensão de Zadeh, em que a solução inicial será representada por um número fuzzy. A solução encontrada para o PVIF proposto demonstra que na medida que é adicionado a imprecisão os valores são alterados de acordo com ela, ou seja, um preço, ou oferta de um produto poderá ser mais alto, ou baixo de acordo com a incerteza adicionada no modelo e, além disso, existem momentos ao qual, a oferta e o preço seguira a mesma direção, porém há outros que estarão em sentidos opostos.

**Palavras-chave:** Conjuntos Fuzzy; Número Fuzzy; Oferta; Preço; Fatores de Produção; Expectativas; Equações diferenciais.

## ABSTRACT

Large quantities of products and services are traded and show every day in an economy and because of this volume there is an inaccuracy in determining the exact form of everything that is going on. Therefore, to perform an analysis of this data, use tools that are able to recognize these inaccuracies. For these and other reasons, useful Fuzzy Logic applies to fuzzy numbers, which is not just analyzing a value, but a range that can capture data inaccuracy (KAHRAMAN; KAYA, 2010). The objective of this paper is to analyze the uncertainty present in the price and supply of a product, applying Fuzzy Logic through the application of Differential Supply and Price Equations in solving a Fuzzy Initial Value Problem (PVIF) by the extension criterion. Zadeh, where the initial solution will be represented by a fuzzy number. A solution found for the proposed PVIF demonstrates that the measure that is added to the inaccuracy of values changes accordingly, that is, a price or offer of a product may be higher or lower according to an uncertainty applied in the product. In addition, there are times when one bid and price are followed in the same direction, but there are others that are sensed in the senses.

**Keywords:** Fuzzy sets; Fuzzy number; Offer; Price; Production Factors; Expectations Differential equations.

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	7
2	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b> . . . . .	8
2.1	Conjuntos Fuzzy . . . . .	8
2.2	Princípio de Extensão de Zadeh . . . . .	10
2.3	Números Fuzzy . . . . .	11
3	<b>DINÂMICA DA OFERTA E PREÇO NO CASO CLÁSSICO</b> . . . . .	16
4	<b>DINÂMICA DA OFERTA E PREÇO NO CASO FUZZY</b> . . . . .	21
5	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	32
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	33
6	<b>APÊNDICE</b> . . . . .	35

## 1 INTRODUÇÃO

Em uma economia, milhares de bens e serviços são trocados todos os dias e constantemente esses mercados são interdependentes e se inter-relacionam, deste modo, é essencial ter um mecanismo para determinar a produção e o consumo dos inúmeros bens e serviços. Com o objetivo de equilibrar esse mercado surge o preço, sendo o principal fator na alocação de bens e recursos de uma economia, tendo a capacidade necessária para gerar alterações na produção e no consumo. Por exemplo, quando o preço de um produto é alto devido à falta de oferta, o consumidor entenderá que faltará esse produto no mercado e assim, o nível de consumo diminuirá e os fornecedores serão incentivados a produzir, e no próximo período como a produção foi estimulada haverá mais produtos e dessa forma, o preço sofrerá uma queda (NASSERI; ABDI; KHABIRI, 2011).

A interação de consumidores e fornecedores é responsável por determinar a quantidade de bens e serviços vendidos e o preço pelo qual é vendido (PANDIT, 2013). Os fatores de produção das empresas, são responsáveis por definir a quantidade produzida, assim, quando ocorrer uma mudança nesses fatores irá gerar uma variação também na produção afetando a oferta de produtos em uma economia.

Para resolver problemas relacionados a imprecisão, Zadeh em 1965, incorporou pela primeira vez a Teoria dos Subconjuntos Fuzzy, se baseando na racionalidade da incerteza, sendo capaz de representar o conhecimento vago e incerto (KAHRAMAN; KAYA, 2010).

Depois da aplicação de Zadeh, a Teoria Fuzzy foi introduzida em várias outras áreas, desde o reconhecimento de símbolos manuscritos em computadores de bolso da Sony, na melhoria do consumo de combustível para carros até no conhecimento das condições da superfície e de degradação do solo, entre outros (WIKIPÉDIA, 2019). Para Ponsard (1988), as aplicações da Teoria dos Subconjuntos Fuzzy em economia são relevantes e eficientes, pois levam em consideração as oscilações ocorridas pelas incertezas humanas e dos fatores de produção, ampliando a resultados que não se poderiam obter pelo método clássico.

Este trabalho foi dividido em quatro seções nas quais a primeira apresenta conceitos fundamentais fuzzy, a segunda demonstram a oferta, demanda e preço no caso clássico, na terceira, os motivos pelos quais considerar uma oferta e preço fuzzy e seus resultados gráficos, com objetivo de mostrar o que acontece com o mercado de um produto ao longo do tempo quando é considerado um preço e uma oferta inicial incerta.

## 2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

### 2.1 Conjuntos Fuzzy

O termo “*Fuzzy*”, vem de origem inglesa, que significa algo incerto, difuso, impreciso. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi introduzida por Lofti Asker Zadeh em 1965 com a publicação do artigo “*Fuzzy Sets*”, com o objetivo de dar um tratamento matemático em termos linguísticos subjetivos, tais como “*aproximadamente*”, “*em torno de*”, entre outros. A teoria de conjuntos fuzzy é utilizada para representar em termos matemáticos, eventos que estão relacionados a algo de incerteza, usando um sistema de “conjuntos”, ao qual as margens desses conjuntos são consideradas incertas. Como por exemplo, analisar a temperatura de um ambiente (quente, morno, médio, frio), a felicidade de uma pessoa (feliz, triste, apático), a idade de um indivíduo (criança, jovem, velho, adulto, meia idade). São exemplos ao qual envolvem uma incerteza em dizer qual o conjunto estes conceitos estão relacionados é nesse sentido que se utiliza-se da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, pois um elemento pode pertencer a mais de um conjunto simultaneamente, um ambiente ele pode estar em uma temperatura “morna”, ou seja, sua temperatura está ao mesmo tempo tanto no conjunto frio, quanto no conjunto quente. Diferentemente da Lógica Clássica, que representa os elementos em pertence ou não pertence a um determinado conjunto, não existindo “meio termo”, como por exemplo, uma pessoa é jovem ou velha, um ambiente é quente ou frio (BARROS; BASSANEZI, 2015).

**Definição 2.1** (GOMIDE; GUDWIN; TANSCHKEIT,1995) *Seja  $U$  um conjunto qualquer e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in T \\ 0 & \text{se } x \notin T \end{cases} . \quad (2.1)$$

A Definição 2.1, tem seu domínio em  $x \in U$  e sua imagem o conjunto  $\{0,1\}$ .

**Definição 2.2** (GOMIDE; GUDWIN; TANSCHKEIT,1995) *Seja  $U$  um conjunto qualquer. Um subconjunto fuzzy  $A$  de  $U$  é caracterizado por uma função, nomeada de função pertinência*

$$\varphi_A : U \longrightarrow [0,1].$$

O valor  $\varphi_A(x)$  indica o grau com que o elemento  $x$  pertence ao conjunto  $U$ . Quando  $\varphi_A(x) = 1$ , isso mostra que o elemento  $x$  tem grau de pertinência completo, e  $\varphi_A(x) = 0$ , mostra que o elemento  $x$  não pertence ao conjunto  $A$ .

A Definição (2.2) foi obtida ampliando-se o contra-domínio da função característica subconjunto,  $\{0,1\}$ , para o intervalo  $[0,1]$ . Assim, um conjunto clássico é um caso particular de um conjunto fuzzy, ao qual sua função pertinência  $\varphi_A$  é sua função característica  $\chi_A(x)$ .

**Definição 2.3** (BARROS; BASSANEZI, 2015) *O subconjunto clássico de  $U$  dado por*

$$\text{supp}A = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\},$$

*denomina-se suporte de  $A$ .*

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos fuzzy de  $U$ , cujas funções de pertinência são dadas  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ , respectivamente.

**Definição 2.4** (FALCÃO, 2002) *(União). A união entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é representada por*

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U. \quad (2.2)$$

A Definição (2.4) é uma extensão do caso clássico, pois quando  $A$  e  $B$  são subconjuntos clássicos de  $U$  temos:

$$\begin{aligned} \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cup B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases} \\ &= \chi_{A \cup B}(x), x \in U. \end{aligned}$$

**Definição 2.5** (FALCÃO, 2002) *(Intersecção). A intersecção entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$ , ao qual a função de pertinência é dada por.*

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U. \quad (2.3)$$

**Definição 2.6** (FALCÃO, 2002) (Complementar de subconjuntos fuzzy). O complementar de  $A$  é o subconjunto fuzzy  $A'$  de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), x \in U. \quad (2.4)$$

Considerando um subconjunto fuzzy  $A$  de  $U$  com elementos de  $x$  que pertence a  $U$ , ao qual cada elemento possui seu grau de pertinência, formando assim uma certa “hierarquia” entre os valores de  $x$ . Para podermos selecionar os elementos de  $x$  fixamos um  $\alpha$ -nível, assim os elementos só pertenceram ao subconjunto  $A$  se seu grau de pertinência ser maior do que o  $\alpha$ -nível fixado entre  $[0,1]$ , denotado por  $[A]^\alpha$ .

**Definição 2.7** (BARROS; BASSANEZI, 2015) O  $\alpha$ -nível do subconjunto fuzzy  $A$  é definido por:

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in U; \varphi_A(x) \geq \alpha\} & \text{para } 0 < \alpha \leq 1 \\ \overline{\{x \in U; \varphi_A(x) > 0\}} & \text{para } \alpha = 0 \end{cases}, \quad (2.5)$$

em que  $\overline{X}$  denoto o fecho do subconjunto  $A$  de  $U$ .

Note que o nível zero é estabelecido como  $[A]^0$ , sendo o menor nível do subconjunto e de maior amplitude, denominado como o fecho do suporte de  $A$ , ou seja  $[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$ .

## 2.2 Princípio de Extensão de Zadeh

**Definição 2.8** (BARROS; BASSANEZI, 2015) Sejam  $f$  uma função tal que  $f : X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . A extensão de Zadeh de  $f$  é a função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$  fornece o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}. \quad (2.6)$$

em que,  $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$  é a pré-imagem de  $z$ .

**Teorema 1** (BARROS; BASSANEZI, 2015) Sejam  $f : X \rightarrow Z$  uma função contínua e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ , com  $\alpha$ -níveis compactos e não vazios. Então, para todo  $\alpha \in [0,1]$ , vale

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (2.7)$$

**Definição 2.9** (BARROS; BASSANEZI, 2015) *Sejam  $f: X \times Y \rightarrow Z$  e  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. A extensão  $\hat{f}$  de  $f$ , aplicada a  $A$  e  $B$ , é o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A,B)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}, \quad (2.8)$$

em que  $f^{-1}(z) = \{(x,y) : f(x,y) = z\}$ .

### 2.3 Números Fuzzy

**Definição 2.10** (BARROS; BASSANEZI, 2015) *Um subconjunto Fuzzy  $A$  é um número Fuzzy quando o conjunto universo no qual  $\varphi_A(x)$  está definida é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e satisfaz as seguintes situações;*

- *Todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ ;*
- *todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são não vazios, com  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;*
- *$\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R}; \varphi_A(x) > 0\}$  é um conjunto limitado.*

Denotaremos os  $\alpha$ -níveis de um número fuzzy por

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha], \quad (2.9)$$

A coleção de todos os número fuzzy será representado por  $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ , para todo  $\alpha \in [0,1]$ .

Todo números real  $r$  é um número fuzzy particular, ao qual, a função de pertinência é a sua função característica

$$\hat{r} = X_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases}.$$

Existem alguns números fuzzy que se destacam na literatura são eles os triangulares, trapezoidais e em forma de sino.

**Definição 2.11** (BARROS; BASSANEZI, 2015) Um número fuzzy  $A$  é denominado triangular se sua função de pertinência é dado por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{se } u < x \leq b \\ 0 & \text{se } x \geq b \end{cases} . \quad (2.10)$$

Os  $\alpha$ -níveis de um número fuzzy triangular têm a forma

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u - a)\alpha + a, (u - b)\alpha + b],$$

para todo  $\alpha \in [0,1]$ .

**Definição 2.12** (BARROS; BASSANEZI, 2015) Um número fuzzy  $A$  é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio representada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (2.11)$$

Os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy trapezoidal são os intervalos

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(b - a)\alpha + a, (c - d)\alpha + d],$$

para todo  $\alpha \in [0,1]$ .

**Definição 2.13** (BARROS; BASSANEZI, 2015) Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para  $u, a$  e  $\delta$  dados

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right) & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} . \quad (2.12)$$

Os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy em forma de sino são os intervalos de

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[ u - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{a^2}}\right)a} + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{a^2}}\right)} \right] & \text{se } \alpha \geq \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} \\ [u - \delta, u + \delta] & \text{se } \alpha < \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} \end{cases} .$$

As operações aritméticas entre números fuzzy são estritamente relacionadas com as operações intervalares. Consideremos  $\lambda$  um número real e,  $A$  e  $B$  intervalos fechados da reta dada por

$$A = [a_1, a_2] \text{ e } B = [b_1, b_2].$$

**Definição 2.14** (BARROS; BASSANEZI, 2015) *As operações aritméticas entre intervalos podem ser definidas como*

(i) *A soma entre  $A$  e  $B$  é o intervalo:*

$$[A + B] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

(ii) *A diferença entre  $A$  e  $B$  é o intervalo:*

$$[A - B] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1].$$

(iii) *A multiplicação de  $\lambda$  um escalar por  $A$  é o intervalo:*

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} .$$

(iv) *A multiplicação de  $A$  por  $B$  é o intervalo:*

$$[A.B] = \{\min P, \max P\}.$$

em que  $P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$ .

(v) A divisão de  $A$  por  $B$ , se  $0 \notin B$ , é o intervalo:

$$\left[ \frac{A}{B} \right] = [a_1, a_2] \left[ \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right].$$

As operações aritméticas para números fuzzy podem ser feitas mediante o Princípio de Extensão.

**Definição 2.15** (FALCÃO, 2002) *Sejam  $A$  e  $B$  dois números fuzzy e  $\lambda$  um número real.*

(i) A soma dos números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A \oplus B$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A \oplus B}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

em que  $\phi(z) = \{(x, y) : x + y = z\}$ .

(ii) A multiplicação de  $\lambda$  por  $A$  é o número fuzzy  $\lambda \odot A$ , cuja função de pertinência é

$$\varphi_{\lambda \odot A}(z) = \begin{cases} \sup_{\{x: \lambda x = z\}} [\varphi_A(x)] & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_0(z) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z) & \lambda \neq 0 \\ \chi_0(z) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}, \quad (2.14)$$

em que  $\chi_0$  é a função característica de  $\{0\}$ .

(iii) A diferença  $A \ominus B$  é o número fuzzy cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \ominus B}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0 \end{cases}, \quad (2.15)$$

em que  $\phi(z) = \{(x, y) : x - y = z\}$ .

(iv) A multiplicação de  $A$  por  $B$  e o número fuzzy  $A \odot B$ , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \odot B}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

em que  $\phi(z) = \{(x, y) : x \cdot y = z\}$ .

(v) A *divisão* é o número fuzzy  $A \oslash B$  cuja função de pertinência é

$$\varphi_{A \oslash B}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(z) = 0 \end{cases}, \quad (2.17)$$

em que  $\phi(z) = \{(x, y) : x/y = z\}$ .

O Teorema (2) a seguir, garante que o resultado das operações aritméticas entre números fuzzy é um número fuzzy e mostra um método prático para essas operações (BARROS; BASSANEZI, 2015).

**Teorema 2** *Os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy  $A \otimes B$  são dados por*

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha,$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , sendo  $\otimes$  qualquer uma das operações aritméticas entre intervalos fechados.

**Proposição 2.1** (BARROS; BASSANEZI, 2015) *Sejam  $A$  e  $B$  números fuzzy com  $\alpha$ -níveis dados, respectivamente, por  $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$  e  $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ . Então valem as seguintes propriedades:*

(i) *A soma entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A \oplus B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$[A \oplus B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

(ii) *A diferença entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A \ominus B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$[A \ominus B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

(iii) A multiplicação de  $\lambda$  por  $A$  é o número fuzzy  $\lambda \odot A$  cujos  $\alpha$ -níveis são

$$[\lambda \odot A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

(iv) A multiplicação de  $A$  por  $B$  é o número fuzzy  $A \odot B$  cujos  $\alpha$ -níveis são

$$[A \odot B]^\alpha = [A]^\alpha [B]^\alpha = \{minP, maxP\}.$$

em que  $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$ .

(v) A divisão de  $A$  por  $B$ , se  $0 \notin \text{supp}B$ , é o número fuzzy cujos  $\alpha$ -níveis são

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}\right].$$

### 3 DINÂMICA DA OFERTA E PREÇO NO CASO CLÁSSICO

Nesta seção, serão analisadas as equações que governam a dinâmica da oferta e preço. Antes de apresentá-las, adotaremos segundo Spiegel (1981) que;

- Uma economia competitiva ocorre quando os produtores e consumidores definem o nível de preço dos produtos, devido à condição dos consumidores mudarem de fornecedores por oferecerem um preço mais baixo pelo produto. Existe, assim, uma disputa entre os produtores para oferecerem um produto com um menor nível de preços.
- Não há atraso no fornecimento, pois a dinâmica da oferta admite que os produtores usam a taxa de alteração dos preços em  $t$ , isto é  $P'(t)$ , para estabelecer o nível de fornecimento de produtos.
- Os rendimentos dos consumidores e o preço de outros bens não são considerados nesse modelo de oferta e demanda.
- Os preços de demanda e oferta são contínuos, ou seja, o preço de um bem representará todos os valores entre dois valores dados. Como, por exemplo, não faz sentido representar o número de maçãs entre 100 e 101.

Consideremos um determinado produto, o preço dele é medido em unidade monetária, a qualquer tempo  $t > 0$ . Assim, podemos pensar o preço  $P$  em função de  $t$  e, desse modo,  $P(t)$  é o preço no tempo  $t$ . Se um carro custa no tempo 1, R\$100.000,00 e no tempo 2, passa a custar R\$110.000,00, temos que  $P(t = 1) = 100.000$  e  $P(t = 2) = 110.000$ .

A quantidade de bens que os produtores têm disponível em relação ao tempo, a qualquer momento  $t$ , é chamado de oferta e denota-se por  $S(t)$  ou  $S$ . A variável  $S$  será influenciada pelo preço e também pela direção que os produtores acreditam que ele chegará. Se os preços estão baixos no tempo  $t$ , os produtores diminuirão a produção, mas eles esperam que os preços possam aumentar, assim produziram mais em adiantamento aos preços mais altos, ou vice-versa (SPIEGEL, 1981). Tal relação é expressa matematicamente por:

$$S = g(P(t), P'(t)). \quad (3.1)$$

A quantidade que os consumidores desejam de determinado produto, a qualquer tempo, é representada pela demanda, que será denotada por  $D(t)$  ou  $D$ . A demanda será influenciada, como o caso acima, por duas condições, o preço  $P$  e a direção em que os consumidores acreditam que ele deverá chegar. Se os preços forem altos no tempo  $t$ , os consumidores diminuirão o consumo, porém, se eles acreditam que o preço de determinado produto possa aumentar, então esse consumo aumentará em virtude da antecipação do aumento do preço, ou vice-versa (SPIEGEL, 1981). Com isso, podemos escrever

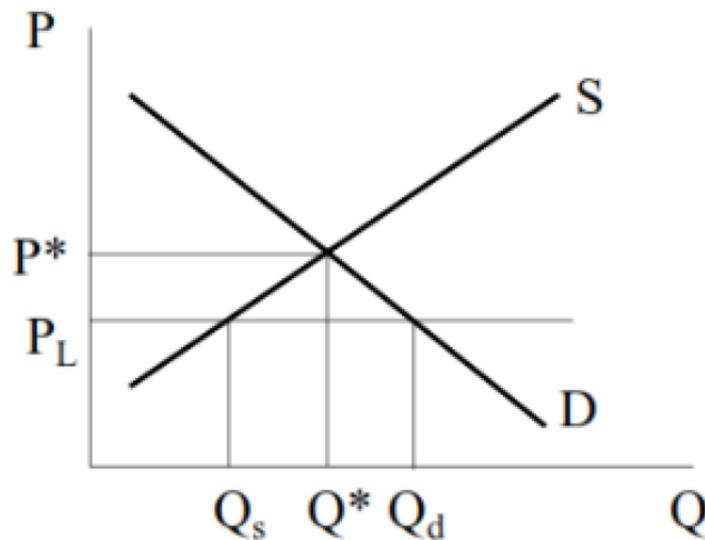
$$D = f(P(t), P'(t)). \quad (3.2)$$

Por outro lado, se a oferta exceder a demanda, há uma tendência para os preços se ajustarem no mercado até acontecer um equilíbrio entre eles, ou seja,  $S=D$ . Dessa maneira, o mesmo acontece para a demanda, se ela ultrapassar a oferta. Representando assim, o princípio econômico da oferta e demanda, ou seja, o preço de um bem ou serviço em qualquer momento é determinado pela condição da oferta seja igual à demanda naquele instante (SPIEGEL, 1981).

Tal princípio econômico determina o equilíbrio de mercado, representado pelo ponto de intersecção das curvas de oferta e demanda. Esse ponto caracteriza um preço e uma quantidade de equilíbrio, de determinado mercado de bens ou serviços, satisfazendo a condição de  $Q_S = Q_D$ . Ou seja, para cada unidade de produto produzida, existem consumidores que estarão dispostos a consumir, não restando produtos para estoque (PANDIT, 2013). A quantidade de

bens em posse dos produtores, é o estoque denotado por  $Q$ .

Figura 3.1 – Equilíbrio da Oferta e Demanda



Fonte: Elaboração PANDIT (2013, p.105).

Analisando a Figura (3.1), pode-se perceber que o preço e a quantidade de equilíbrio de um mercado qualquer, foi representado por  $P^*$  e  $Q^*$ , sendo a demanda uma reta decrescente, e a oferta uma reta crescente.

Considerando a situação em que a oferta e a demanda não são iguais ao longo do tempo, mas serão alteradas para satisfazer uma, a outra, ou seja, quando a demanda se altera a oferta também será alterada. Se a oferta é maior que a demanda, então, os produtores terão uma quantidade de bens em posse, que se espera vender no futuro, por outro lado, se a demanda for maior que a oferta os produtores deverão adquirir estoque (SPIEGEL, 1981).

Denotando por  $Q(t)$  a quantidade de unidade de um bem disponível no tempo  $t > 0$ ,  $S$  o número de unidades de um bem oferecidas no tempo pelos produtores, representada pela Equação (3.1) e  $D$  a quantidade de um bem, demandadas no tempo pelos consumidores, pela Equação (3.2). Então em um tempo  $t + \Delta t$  a quantidade de um bem disponível, será  $Q(t + \Delta t) = Q(t) + \Delta Q$ . Assim a quantidade de um bem acumulada nesse intervalo será dada por

$$\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t). \quad (3.3)$$

Entre esse período de  $t + \Delta t$  o número de unidades demandadas pelos consumidores e oferecidas pelos produtores será dada por  $S\Delta t$  e  $D\Delta t$ , em que esses resultados serão precisos, exceto pelos termos  $F(\Delta t)^2$ , (SPIEGEL, 1981). Dessa forma, a equação matemática que

representará a quantidade acumulada nesse período é dada por

$$\Delta Q = S\Delta t - D\Delta t + F(\Delta t)^2. \quad (3.4)$$

Com isso, temos:

$$\frac{dq}{dt} = S - D + F(\Delta t)^2. \quad (3.5)$$

Tomando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , a Equação (3.5) se escreve:

$$\frac{dq}{dt} = S - D. \quad (3.6)$$

Observando os fatores mencionados acima que alteram a oferta e demanda de um determinado produto, iremos fazer algumas formulações matemáticas para explicar a variação do preço e sua oferta no tempo.

Analisando o preço  $P$  de um produto em uma economia, pode-se supor que ele será alterado pela inflação do período e pela oferta no mercado, uma vez que, um aumento em  $P$  resulta em uma elevação da oferta  $S$ , o que, conseqüentemente, gera uma diminuição dos preços e a inflação ao longo de  $t$  gera um acréscimo dos preços. Assim, como resultado desses fatores, assumiremos que a taxa de variação do preço é proporcional à diferença entre a oferta  $S$  no momento  $t$  e a oferta de equilíbrio  $S_0$  (BUCKLEY, 1992). Quando  $S > S_0$ , a oferta de um produto está maior que a oferta de equilíbrio, assim, o preço tende a cair e, quando  $S < S_0$  a oferta está menor que a oferta de equilíbrio, o preço tende a aumentar. Como pode ser visto, essa relação entre a oferta e preço é inversa. Com isso, temos que

$$\frac{dP}{dt} = \theta - k_1(S - S_0), \quad (3.7)$$

em que  $\theta$  é a inflação,  $k_1$  uma constante positiva e a condição inicial dada por será  $P(0) = P_0$ .

Para a análise da oferta, assume-se que a taxa de variação da oferta é proporcional à diferença entre o preço  $P$  no momento  $t$  e o preço de equilíbrio  $P_0$ . (BUCKLEY, 1992). A equação diferencial será dada por

$$\frac{dS}{dt} = k_2(P - P_0), \quad (3.8)$$

em que  $k_2$  é uma constante positiva e  $S(0) = S_0$ .

Quando  $P < P_0$ , o preço de um produto está menor que seu preço de equilíbrio, o resultado da Equação 3.8 será negativa, então a oferta tende a diminuir e, quando  $P > P_0$ , o preço está maior que o preço de equilíbrio, assim o resolução da Equação 3.8 será positiva, então a oferta tende a aumentar.

Isolando a variável  $S$  na Equação (3.7),temos:

$$S = \frac{\theta}{k_1} + S_0 - \frac{P'}{k_1}. \quad (3.9)$$

Logo,

$$S' = -\frac{P''}{k_1}. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.8), segue que

$$P'' = -k_1k_2P + k_1k_2P_0. \quad (3.11)$$

Isolando a variável  $P$  na Equação (3.8), temos:

$$P = \frac{S'}{k_2} + P_0. \quad (3.12)$$

e com isso

$$P' = \frac{S''}{k_2}. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.7), segue que

$$S'' = k_2\theta - k_1k_2S + k_1k_2S_0. \quad (3.14)$$

As equações diferenciais que governam a dinâmica da oferta e demanda, no caso clássico são dadas por:

$$S'' - k_2\theta + k_1k_2S - k_1k_2S_0 = 0. \quad (3.15)$$

$$P'' - k_1k_2P_0 + k_1k_2P = 0. \quad (3.16)$$

Denotando por  $P_0 = \gamma_0$  e  $S_0 = \gamma_1$  e, assumindo que  $\theta = 5\%$ ,  $k_1 = k_2 = 0,5$ ,  $P_0 = 25$

e  $S_0 = 1200$  (BUCKLEY; ESLAMI; FEURING, 2002), as soluções para as Equações (3.15) e (3.16) são dadas por

$$S = \gamma_1 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \gamma_0 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) + \Phi_2(t). \quad (3.17)$$

$$P = \gamma_0 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \gamma_1 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) + \Phi_1(t). \quad (3.18)$$

em que as funções  $\Phi_1(t)$  e  $\Phi_2(t)$  são constantes e não contêm as variáveis  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

#### 4 DINÂMICA DA OFERTA E PREÇO NO CASO FUZZY

Segundo Pindyck, Rubinfeld e Rabasco (2013), a oferta é determinada pela sua produção, em que as empresas têm função fundamental de transformar os insumos que ela adquire em produtos. Esses insumos são chamados também de fatores de produção, e são todos os materiais que se utiliza no processo produtivo. Os fatores de produção são divididos em três grandes categorias:

- O trabalho que retrata a capacidade das pessoas em transformar os objetos.
- A matéria-prima será os estoques de bens naturais como terras cultiváveis, florestas, minas, recursos naturais. São os materiais que serão transformados em produtos finais.
- E o capital que pertence ao conjunto de elementos materiais que fundamentam a produção, como as máquinas industriais, equipamentos de informática e de telecomunicações, meios de transporte e instalações, entre outros.

Dessa forma, como o produto de uma empresa depende dos fatores de produção, pode-se escrever essa relação como uma função que mostrará o volume de produção que uma empresa utiliza para cada combinação de insumos. Essa função de produção pode ser representada como:

$$Q = f(K, L, M) \quad (4.1)$$

em que  $Q$  representa a quantidade produzida,  $K$  o capital,  $L$  o trabalho e  $M$  a matéria-prima utilizada. Assim, essa equação mostrará a quantidade de produtos que dependem das quanti-

dades dos três insumos. Como exemplo: uma colheita de soja de um agricultor vai depender do espaço para o plantio, a quantidade de equipamentos e trabalhadores que serão utilizados na produção (PINDYCK; RUBINFELD, RABASCO, 2013).

Além desses fatores de produção, existem outras condições que podem alterar a produção, em curto prazo. Não é possível construir uma nova fábrica ou comprar novos equipamentos básicos e máquinas, eles precisam ser encomendados e produzidos, necessitando, assim, de um tempo. Desta maneira, a curto prazo, as empresas só podem mudar a intensidade de utilização da fábrica e equipamentos. Já a longo prazo, ela vai poder modificar seu tamanho da fábrica, poderá comprar mais equipamentos, entre outros. Com essas características, pode-se formar uma definição para curto prazo que se refere ao período pelo qual a quantidade de um ou mais fatores de produção não podem ser alterados, e longo prazo é o tempo necessário para todos os fatores de produção poderem variar (PINDYCK; RUBINFELD, RABASCO, 2013).

O investimento consiste no gasto destinado à manutenção ou aumento do estoque de capital  $K$ . O tempo necessário para realizar esse investimento é muito subjetivo, podendo ser semanas, meses ou anos, como o caso de investimentos em usinas hidrelétricas que demoram vários anos para entrar em operação. Esses investimentos de longa duração são determinados, fundamentalmente, pela expectativa sobre o nível de produção que estarão buscando em média no futuro (DORNBUSCH; FISCHER, 1991).

Essas expectativas têm um destaque importante na análise Keynesiana, sendo um dos motivos principais que alteram o investimento e que causam instabilidade econômica, devido às incertezas causadas pela expectativa das empresas sobre a rentabilidade futura dos projetos de investimentos. Como, por exemplo: para uma instituição estabelecer a lucratividade de um projeto de investimento com 10 ou 34 anos, o administrador necessitaria conhecer a oferta e a demanda futura pelo produto que seria produzido, saber sobre os custos de produzir esse produto no futuro como alíquotas, impostos, salários, entre outros. Diante de tanta incerteza, os administradores racionais formavam suas expectativas utilizando técnicas, porém mudavam com muita frequência, em resposta a novas informações e eventos, deixando o investimento de forma instável (FROYEN, 2003).

Em um ambiente de decisão econômico incerto, valores em dinheiros e taxas de juros são normalmente estimados, utilizando expectativas sobre valores esperados tentando assim, obter uma previsão do que pode acontecer no futuro. A Lógica Fuzzy com o objetivo de auxiliar nas estimativas podem capturar essas suposições incertas (KAHRAMAN; KAYA, 2010).

Um dos principais argumentos sobre a proposta de realizar um investimento é sua rentabilidade futura, ao qual, na maioria das vezes é medida através de dois critérios: A Taxa Interna de Retorno, é a taxa de juros que quando aplicada aos vários fluxos de caixa faz com que os valores das despesas, trazidos ao valor presente, seja igual aos valores dos retornos dos investimentos, também trazidos ao valor presente ao longo da vida do investimento. E o Valor Presente Líquido, em que um investimento proposto é definido pela diferença entre os ganhos futuros descontados a uma taxa de juros, menos o custo do investimento atual. Porém, esses critérios são calculados com base nos valores possíveis de acontecer, ou seja, esses indicadores estão sujeitos a incerteza transformando esses parâmetros de rentabilidade em estimativas (WAGLE, 1967).

Valores são elaborados no momento em que o investimento é apresentado, estando sujeito a afastamento dos valores esperados. Essas alterações nos resultados são os riscos, sendo uma das principais preocupações na hora de avaliar as alternativas de investimento. As condições que podem surgir esses riscos são extensas podendo incluir o investimento inicial, despesas anuais de operação, horizonte de planejamento de produção e vida útil do investimento (KAHRAMAN; KAYA, 2010).

As decisões também podem atrasar um investimento, caso o projeto seja de longa duração vai depender muito da perspectiva da economia de um país, pois se ela estiver em recessão e não se sabe quando irá acabar, esse projeto tende a esperar a economia melhorar para sua realização, devido à incerteza gerada de como estará o desenvolvimento do país no futuro (DORNBUSCH; FISCHER, 1991).

A taxa de juro pode gerar flutuações no investimento, pois quando os juros estão em crescimento, há menos projetos com retornos altos o suficiente para cobrir os gastos com a contratação de empréstimos e, quando essas taxas estão baixas, contratar um empréstimo ficou mais barato, assim terão mais projetos rentáveis para justificar a contratação (FROYEN, 2003).

Consequentemente, essas flutuações do investimento devido às incertezas sobre a rentabilidade futura trazendo a valores presentes, podem afetar a receita de vendas, mão-de-obra, custos das empresas, produtividade entre outros (WAGLE, 1967). Dessa forma, o investimento atinge de forma direta os fatores de produção que são responsáveis pela produção das empresas, assim o investimento acaba se tornando capaz de atingir uma oferta de produtos em um mercado, ou dependendo da magnitude da alteração desses investimentos, podem gerar uma variação da oferta de produtos em um país inteiro. Por esses motivos consideram-se uma oferta

inicial de produtos incerta. Considerando uma oferta incerta, devemos considerar também o preço desse produto incerto, pois não saberemos a quantidade disponível desse produto no mercado e qual será seu preço de equilíbrio. Uma vez que, segundo Megliorini (2006), o preço varia em diferentes níveis de demanda e oferta até atingir uma quantia que satisfaça tanto os produtores quanto os consumidores, formando desse modo, o preço de equilíbrio.

Considerando que a oferta em  $t = 0$  seja modelada por um número fuzzy, temos o seguinte Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF):

$$\begin{cases} S'' - k_2\theta + k_1k_2S - k_1k_2S_0 = 0 \\ S(0) = A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.2)$$

em que  $k_1$  é a constante relacionada a equação do preço,  $k_2$  é a constante relacionada a equação da oferta,  $\theta$  inflação do período,  $S_0$  a oferta de um produto no início e  $S$  a oferta do produto em um tempo qualquer. Denotaremos os níveis do número fuzzy  $A$  por  $[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]$  para cada  $\alpha \in [0,1]$ .

Utilizando o Princípio de Extensão foi possível achar a solução fuzzy  $S$  ao se fuzzificar  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

$$S = \gamma_1 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \gamma_0 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \Phi_2(t). \quad (4.3)$$

Levando em consideração o preço em  $t = 0$ , também seja modelada por um número fuzzy, temos o seguinte Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF):

$$\begin{cases} P'' - k_1k_2P_0 + k_1k_2P = 0 \\ P(0) = A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (4.4)$$

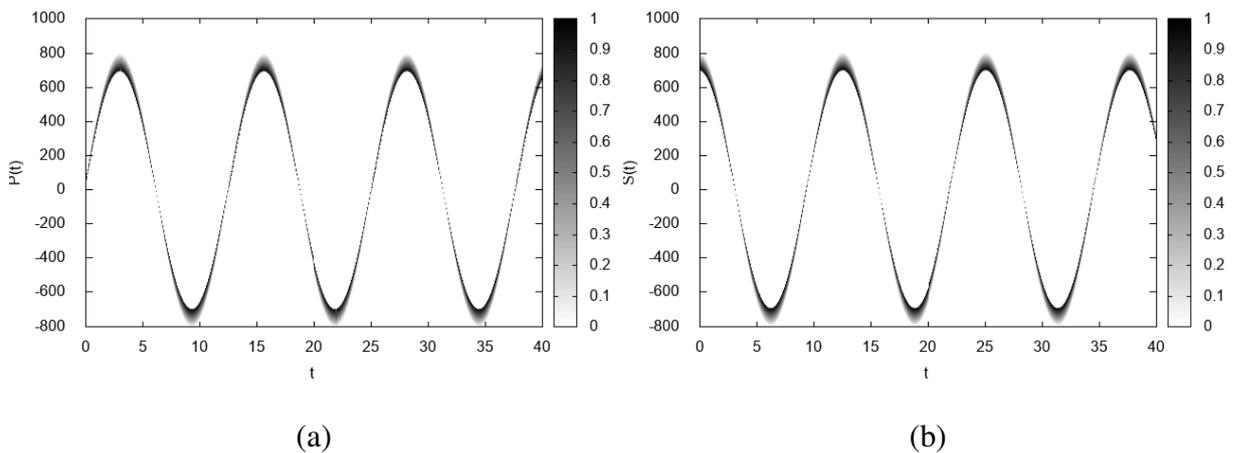
Utilizando o Princípio de Extensão foi possível achar a solução fuzzy  $P$  ao se fuzzificar  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

$$P = \gamma_0 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \gamma_1 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \Phi_1(t). \quad (4.5)$$

As Figuras (4.1) divididas em (a) e (b), ilustram a representação gráfica das soluções fuzzy  $[P(t)]^\alpha$  e  $[S(t)]^\alpha$ , obtidas através do Princípio de Extensão. Em que,  $\gamma_1 = (690; 700; 800)$ , será o coeficiente da oferta de um produto inicial dado por um número fuzzy triangular, e

$\gamma_0 = (34; 35; 40)$ , será o coeficiente do preço de um produto inicialmente dado por um número fuzzy triangular. Como, por exemplo, em  $t = 9$  e  $P(t) = -700$  da Figura (4.1) (a), apresenta um diâmetro maior do que comparado com outras partes da Figura que não está localizada nos extremos, tendendo a dizer que esses pontos podem demonstrar uma incerteza maior devido ao fato, de estarem no início de uma mudança de tendência, ou em um momento em que as expectativas sobre o futuro estão muito incertas. O mesmo acontece para o caso em  $S(t)$  da Figura (4.1) (b), pelo motivo de  $\Phi_1(t)$  e  $\Phi_2(t)$  ter sido considerado iguais, porém ele tem um início na oferta de produtos incerta diferente de (a) que expressa um início de um preço incerto.

Figura 4.1 – Comportamento das soluções  $P(t)$  e  $S(t)$ , ao considerar  $\gamma_1 = (690; 700; 800)$  e  $\gamma_0 = (34; 35; 40)$ , no qual os  $\alpha$ -níveis são representados pela escala em cinza, variando de 0 a 1 e são representados respectivamente por uma variação de cor de branco a preto.

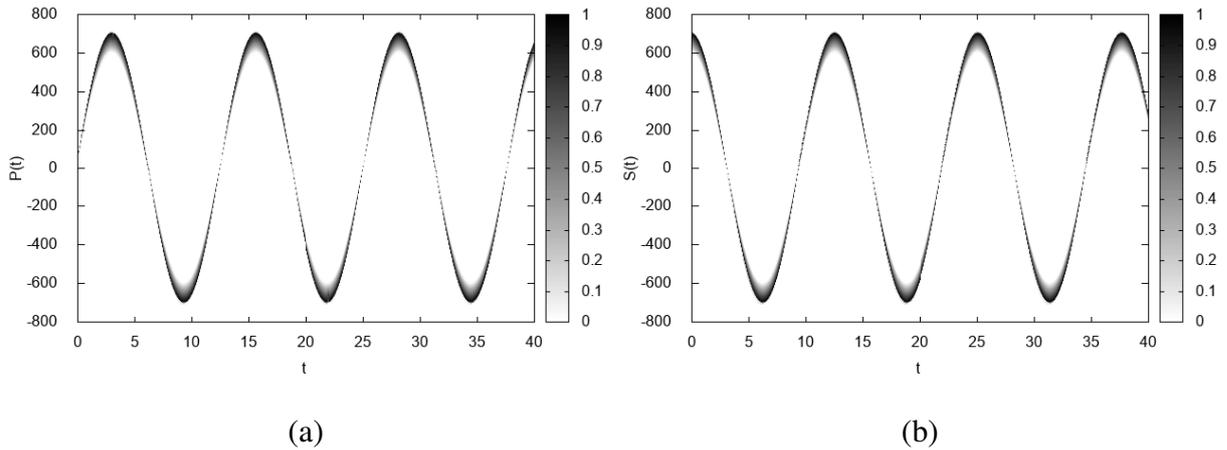


Fonte: Elaboração própria.

Já as Figuras (4.2) divididas também em (a) e (b), ilustram as mesmas equações, porém, seus coeficientes foram alterados, passando a ser  $\gamma_1 = (600; 700; 710)$  e  $\gamma_0 = (30; 35; 36)$ . Quando consideramos diferentes coeficientes temos outros resultados, como pode-se analisar observando as Figuras (4.1) e (4.2), as incertezas se manteve diferentes no tempo  $t$ , porém com preços e ofertas distintos. Como, por exemplo, na Figura (4.1) (a) em  $t = 16$  o preço clássico de um produto seria de 700, mas quando adicionamos os coeficientes fuzzy esse preço tende a ter uma amplitude maior podendo chegar até 800, assim o preço clássico acaba se tornando aproximadamente preço mínimo considerando o caso fuzzy. Já na Figura (4.2) (a) com outros coeficientes no mesmo tempo  $t$ , o preço clássico de um produto seria o mesmo, porém o preço clássico não seria o preço mínimo mais algo em torno do preço máximo, pois quando adicionamos os coeficientes fuzzy esse preço aproxima-se de uma amplitude menor dos

preços, podendo chegar até 600. O mesmo acontece para o caso  $S(t)$ , mas em  $t$  diferente.

Figura 4.2 – Comportamento das soluções  $P(t)$  e  $S(t)$ , ao considerar  $\gamma_1 = (600; 700; 710)$  e  $\gamma_0 = (30; 35; 36)$ , no qual os  $\alpha$ -níveis são representados pela escala em cinza, variando de 0 a 1 e são representados respectivamente por uma variação de cor de branco a preto.



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com a forma geométrica do número fuzzy triangular utilizado para incorporar incerteza nos coeficientes  $\gamma_1$  e  $\gamma_0$ , nota-se que através da escala ao lado do gráfico ilustrado pelas Figuras (4.1) e (4.2), que para cada par  $P(t)$  e  $S(t)$ , em um tempo fixo, existe uma incerteza do preço e oferta de um produto, podendo observar maior amplitude nos extremos.

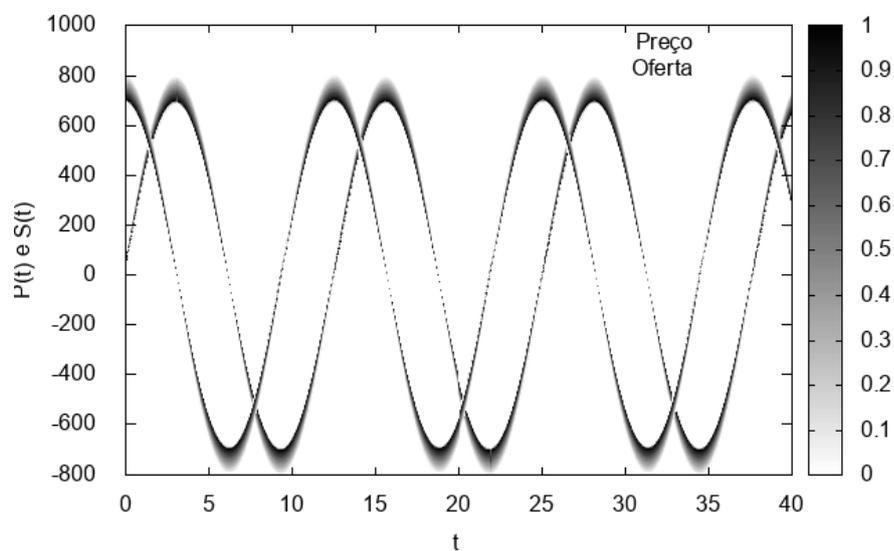
Como pode ser visto que cada alteração nos coeficientes, produz uma mudança nos pontos e nos níveis de incertezas da oferta e preço, formas não simétricas do número fuzzy triangular podem estabelecer diferentes preços e ofertas.

Os números fuzzy triangulares escolhidos poderiam ter outras formas, com bases maiores ou menores de amplitude, podendo ser eles mais simétricos ou não. As implicações dessas alterações seriam curvas com mais ou menos incertezas em um tempo qualquer. E quanto menos simétricos fossem os coeficientes escolhidos mais incertezas existiriam nas Figuras (4.1) e (4.2).

Fazendo uma comparação entre as soluções fuzzy  $S(t)$  e  $P(t)$  na Figura (4.3), observamos que existem momentos em que a oferta e preço acompanham a mesma direção, mas em outros momentos isso ocorre de forma inversa. No intervalo de  $t$ , entre 0 e 3, a oferta está caindo, devido a várias condições tanto por motivos naturais que acabam afetando a produção ou algo que está alterando os fatores de produção, diminuindo a sua produtividade, como, por exemplo, a condição sobre o investimento numa empresa ser incerta devido à expectativa sobre

o futuro, gerando uma diminuição de produtos na economia, com essa queda os preços acabam se elevando. Mas com o passar do tempo no intervalo de 3 a 6, começa a haver um ajuste no preço devido a sua alta, por consequência dessa elevação gerou uma diminuição na demanda e por esse motivo o preço começa a cair desincentivando os produtores a produzir, até um ponto aonde eles continuaram a produzir para tentar manter as suas atividades em funcionamento, com o objetivo de manter as suas contas controladas colocaram mais produtos no mercado mesmo com o preço do produto em queda, para tentar adquirir receitas para manter o seu funcionamento, representando o intervalo de tempo entre 6 e 9. A partir desse momento o preço atinge patamares muito baixos, devido ao aumento de produtos no mercado, nesse momento por fatores externos e como o preço está muito baixo vai existir muita demanda pelo produto e assim irá faltar no mercado e por esse motivo, o preço começa a subir com o objetivo de equilibrar esse mercado. No momento em que o preço começa a subir, inicia-se um incentivo para a oferta, pois, está cada vez mais rentável produzir, acontecendo isso até o tempo 12, aonde tudo se inicia novamente devido a sua periodicidade.

Figura 4.3 – Representação gráfica das Soluções fuzzy de  $S(t)$  e  $P(t)$



Fonte: Elaboração própria.

Com o objetivo de tentar entender o comportamento do preço e da oferta quando se considera eles inicialmente incerto foram realizadas várias simulações e para a análise neste trabalho foi selecionado algumas dessas simulações, aonde os coeficientes utilizados na simulação está representada na Tabela (4.1).

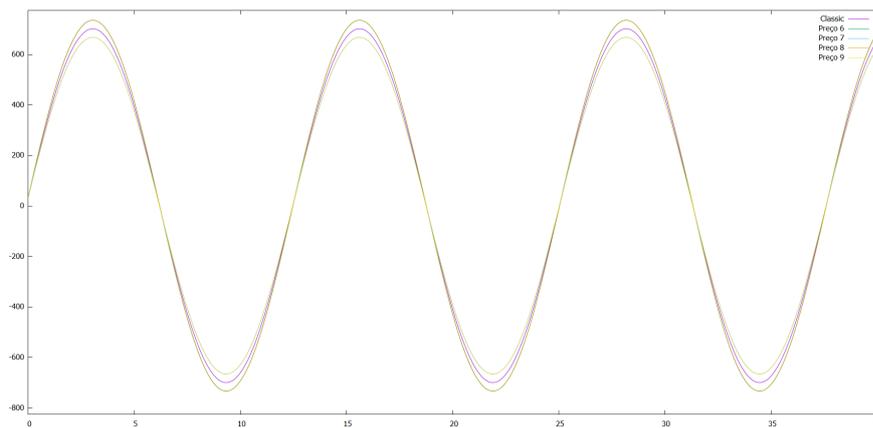
Tabela 4.1 – Coeficientes dos números fuzzy para cada simulação de  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ 

Simulações	$\gamma_0$	$\gamma_1$
Preço e Oferta 6	34;35;40	690;700;800
Preço e Oferta 7	30;35;36	600;700;710
Preço e Oferta 8	30;35;36	690;700;800
Preço e Oferta 9	34;35;40	600;700;710

Fonte: Elaboração própria.

Na Figura (4.4) são mostrados as soluções defuzzificadas, para cada preço testado, foi utilizado o centroide como método de defuzzificação. Pois para o método do Princípio de Extensão a maneira mais conveniente de se comparar um resultado fuzzy com o clássico é trazer os conjuntos fuzzy para os números reais.

Figura 4.4 – Representação gráfica da Solução fuzzy  $P(t)$  entre os modelos defuzzificados e o modelo clássico.



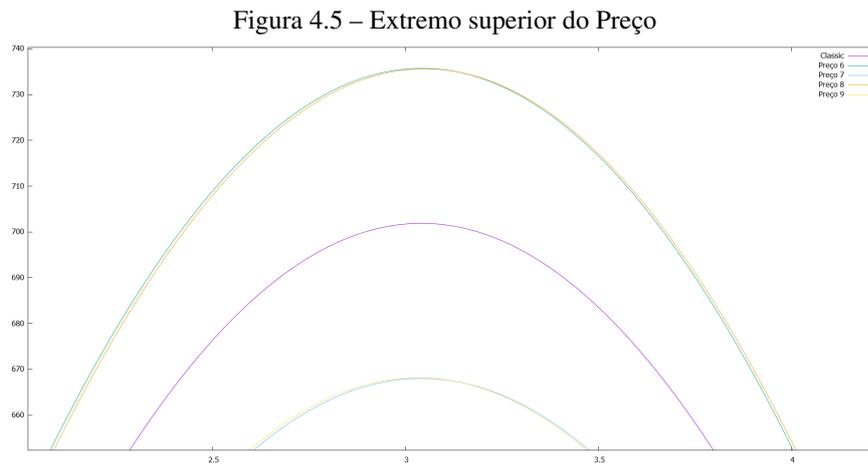
Fonte: Elaboração própria.

Tanto para  $S(t)$  e  $P(t)$ , demonstraram terem o mesmo resultado, porém em tempos diferentes, por esse motivo não especificaremos o tempo, mais o intervalo em que ocorre a inversão das curvas defuzzificadas. Observando os resultados da simulação do Preço 6, pode-se perceber que a curva estava acima da curva clássica inicialmente, porém quando ela chegou em  $P(t)$  num intervalo de  $-2,5$  e  $-3,5$ , ocorreu uma inversão da curva defuzzificada ficando abaixo da clássica, mas com o passar de  $t$  novamente aconteceu outra inversão no intervalo entre  $4,5$  e  $5,5$ , com a curva defuzzificada ficando novamente acima da clássica.

Já a curva da simulação do Preço 7, aconteceu da mesma forma do Preço 6, porém de maneira invertida, a curva defuzzificada iniciou abaixo da clássica, mas intervalo de  $P(t)$   $-2,5$  e  $-3,5$  ela acabou invertendo para cima e depois no outro ela voltou a ficar abaixo da curva clássica novamente.

A simulação do Preço 8, gerou resultados um pouco diferentes, a curva defuzzificada iniciou abaixo da clássica, mas essa inversão aconteceu quando atingiu o  $P(t)$  num intervalo de 66,5 e 67,5, ficando acima da clássica e com o passar de  $t$ , aconteceu novamente a inversão no intervalo em  $-64,5$  e  $-65,5$ , ao qual, a defuzzificada ficou novamente em baixo da clássica. E para o teste Preço 9, aconteceu o mesmo da curva do Preço 8, mas de forma invertida.

Podemos dizer também que a oferta de um produto tem uma maior amplitude, do que o preço quando se considera coeficientes diferentes fixando um mesmo número fuzzy para a oferta como no caso do teste 6 e 8, dessa forma, é possível visualizar o impacto do preço na oferta e preço de um produto. Como resultado obteve-se que o preço apresenta uma variação menor, mas gera uma modificação na curva para a esquerda ou para a direita dependendo do coeficiente fuzzy utilizado, como pode ser visto na Figura (4.5).



Fonte: Elaboração própria.

Uma forma de comparação entre a solução clássica e as soluções defuzzificadas é medir a distância entre as curvas. Neste trabalho, utilizaremos a variação percentual entre os valores obtidos entre a curva clássica e a curva defuzzificada, ou seja:

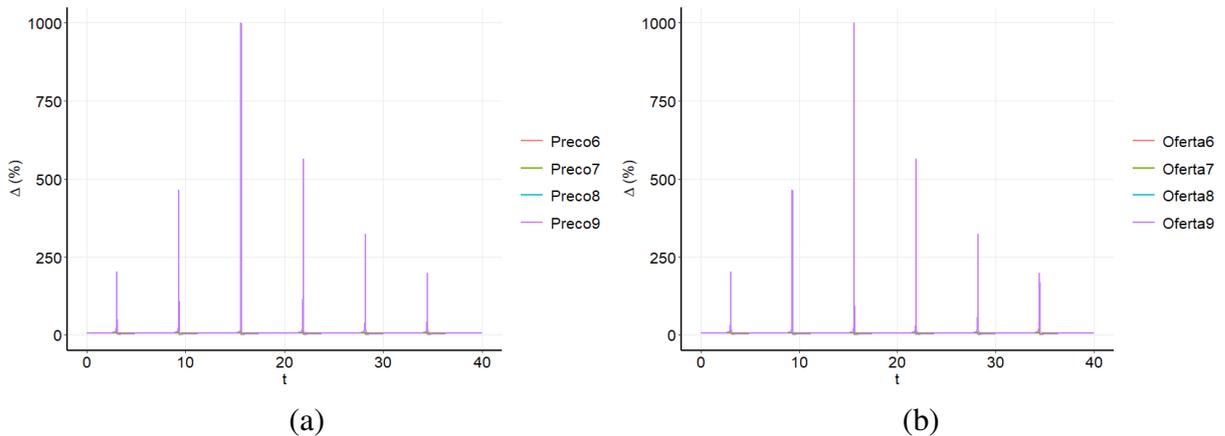
$$\Delta A(\%) = 100 \left| \frac{A_c - A_{df}}{A_c} \right|, \quad (4.6)$$

em que  $A_c$  e  $A_{df}$  são respectivamente os valores da função clássica e o correspondente valor obtido pela defuzzificação da função fuzzy.

O significado dos resultados da Equação 4.6 é a magnitude percentual das incertezas presentes da oferta e preço, em cada posição  $t$ . Na Figura 4.6 são mostrados os resultados de  $\Delta A(\%)$  para cada oferta e preço testada.

Igual os resultados obtidos acima o percentual do preço será igual à oferta. Analisando

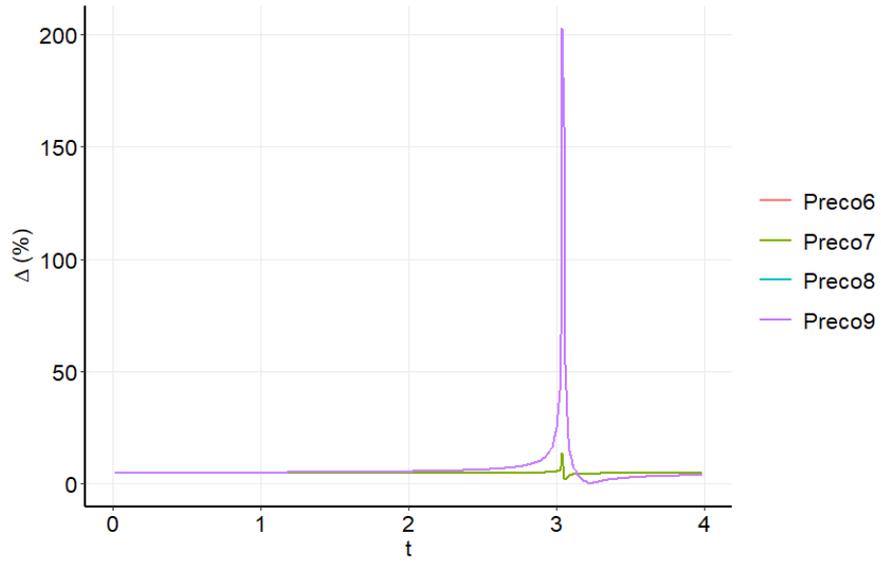
Figura 4.6 – Diferença percentual.



Fonte: Elaboração própria.

a Figura (4.6) (a), percebe-se que em alguns momentos ao longo de  $t$ , acontece picos de variação em diferentes proporções e que variam de acordo com os coeficientes testados, na mesma condição aonde a oferta estará próxima de zero e o preço está perto do preço máximo. Um dos motivos de haver esses picos de variação é devido o fato da oferta está quase perto de zero e em momentos assim uma variação é mais presenciada. O ponto de maior pico está em  $t = 15,61$  e diferença percentual absoluta de 1000.306367, aonde a oferta de um produto está em 0,49619 e o seu preço de 668,17.

Aproximando o gráfico na Figura (4.7), nota-se que dois preços testados não estão aparecendo no gráfico, devido o motivo de apresentarem a mesma variação do teste do Preço 9 e 7. Observando o teste do Preço 9, observamos que ele inicia com uma variação percentual cerca de 4,8% e na medida que a oferta vai se aproximando de zero e o preço se aproxima dos extremos a diferença percentual vai a aumentar também até atingir o seu pico máximo de variação em 202,6262%, em  $t = 3,04$  com preço em 668,1738 e oferta de  $-1,6289$ , e na medida que o preço se distancia do extremo e a oferta de zero, a variação percentual também cai a atingir uma mínima em  $t = 3,23$ , quando se tem uma diferença de 0,007758%, e após essa mínima a diferença percentual volta a subir novamente. O mesmo acontece para o teste de Preço 7, porém em variações com amplitudes diferentes e tempos diferentes, devido à diferença dos coeficientes fuzzy iniciais. Dessa forma, podemos supor que na medida que a oferta se aproxima de zero e o preço próximo do extremo a variação percentual aumenta, ou seja, que a incerteza afeta mais as ofertas que estão próximas de zero e os preços que estão perto dos seus extremos.

Figura 4.7 – Aproximação das diferenças percentuais de  $t$  entre 0 e 4, para  $P(t)$ .

Fonte: Elaboração própria.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em economia, aplicações com essa relação faz muito sentido, pois grande parte das vezes é realizado previsões relacionadas ao presente e futuro, nunca se sabe ao certo realmente o que pode acontecer, mas, se tem uma noção de qual rumo algo pode tomar. Como é o caso de tentar determinar uma oferta e preço fuzzy, quando não se sabe realmente, essa oferta e preço inicialmente.

E segundo Ponsard (1988, p.282) “modelos matemáticos fuzzy em economia tem, de fato, fundamentos científicos que garantem não apenas a viabilidade do seu desenvolvimento, mas também a significância dos seus resultados”. Sendo possível observar está afirmação na análise feita no trabalho, que conseguiu demonstrar resultados que não se pode obter utilizando a Teoria Clássica.

Os resultados obtidos no trabalho foi possível observar a necessidade de se utilizar ferramentas capazes de considerar a incerteza, pois um preço ou oferta pode ser maior, ou menor do que o representado pelo caso clássico devido à imprecisão, dependendo de como ser essa incerteza pode gerar resultados em que, o preço clássico acaba se tornando o preço mínimo e o preço considerando o caso fuzzy pode ter valores superiores e vice-versa. Em alguns pontos as incertezas são muito maiores devido, a variação percentual de como esse preço e oferta irá reagir diante dessa imprecisão. Sendo possível também verificar que a oferta e preço em alguns momentos seguem a mesma direção, porém em outros estarão em sentidos opostos.

Como trabalhos futuros sugere-se realizar aplicações para as Equações Diferenciais estudadas utilizando o método fuzzy e outros modelos de Equações Diferencias aplicadas na Economia.

## REFERÊNCIAS

BARROS, L, C.; BASSANEZI, R, C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. 3 ed. Campinas, SP: UNICAMP/ IMECC, 2015.

BUCKLEY, James J.; ESLAMI, Esfandiar; FEURING, Thomas. **Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering**. 91. ed. New York, 2002.

BUCKLEY, James J.; Solving fuzzy equations in economics and finance. **Fuzzy Sets and Systems**, North-Holland, v. 48, n. 3, p. 289-29, 1992.

DORNBUSCH, Rudiger; FISCHER, Stanley. **Macroeconomia**. 5. ed. São Paulo, 1991.

FALCÃO, Djalma M. **Conjuntos, lógica e sistemas fuzzy**. COPPE/UFRJ, 2002.

FROYEN, Richard T. **Macroeconomia**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

GOMIDE, Fernando; GUDWIN, Ricardo R.; Ricardo TANSCHKEIT. **Conceitos fundamentais da teoria de conjuntos fuzzy, lógica fuzzy e aplicações**. In Proc. 6 th IFSA Congress-Tutorials, v. 59, p. 1-38, 1995.

KAHRAMAN, Cengiz; KAYA, İhsan. Investment analyses using fuzzy probability concept. **Technological and Economic Development of Economy**, v. 16, n. 1, p. 43-57, 2010.

MEGLIORINI, Evandir. **Custos: Análise e Gestão**. Pearson Prentice Hall, 2006.

NASSERI, S.H.; ABDI, M.; KHABIRI, B. An Application of Fuzzy Linear System of Equations in Economic Sciences. **Australian Journal of Basic and Applied Sciences**, v. 5, n. 7, p. 7-14, 2011.

PANDIT, Purnima K. Supply-and-demand model involving fuzzy parameters. **Int. J. of Adv. in Aply. Math. and Mech**, v. 1, n. 2, p. 103-115, 2013.

PINDYCK, Robert S.; RUBINFELD, Daniel L.; RABASCO, Esther. **Microeconomia**. Pearson Italia, 2013.

PONSARD, Claude. Fuzzy mathematical models in economics. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 28, n. 3, p. 273-283, 1988.

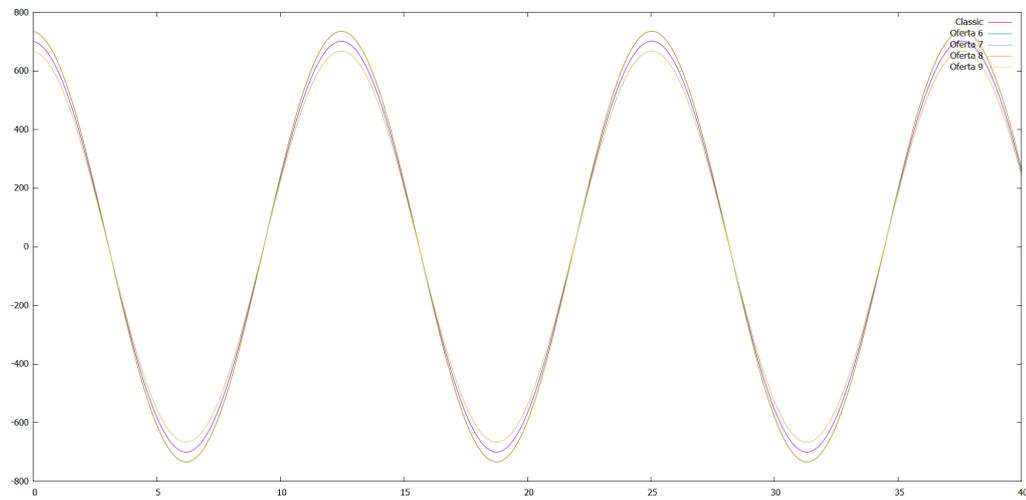
SPIEGEL, Murray R. **Applied Differential Equations**. Third Edition (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 1981)

WAGLE, B. A statistical analysis of risk in capital investment projects. **Journal of the Operational Research Society**, v. 18, n. 1, p. 13-33, 1967.

WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. **Lógica difusa**. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Logica-difusa>. Acesso em: 21 set. 2019.

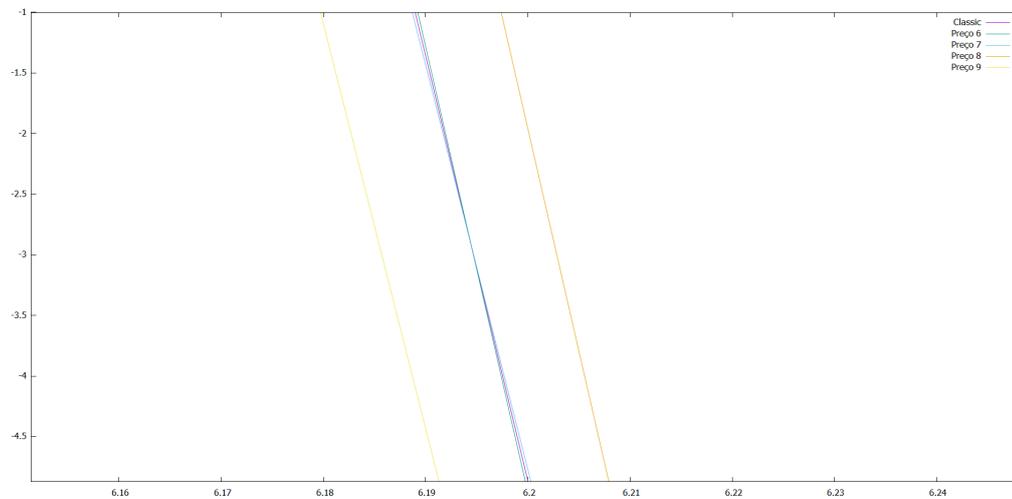
## 6 APÊNDICE

Figura 6.1 – Representação gráfica da Solução fuzzy  $S(t)$  das comparações entre os modelos defuzzificados e o modelo clássico.

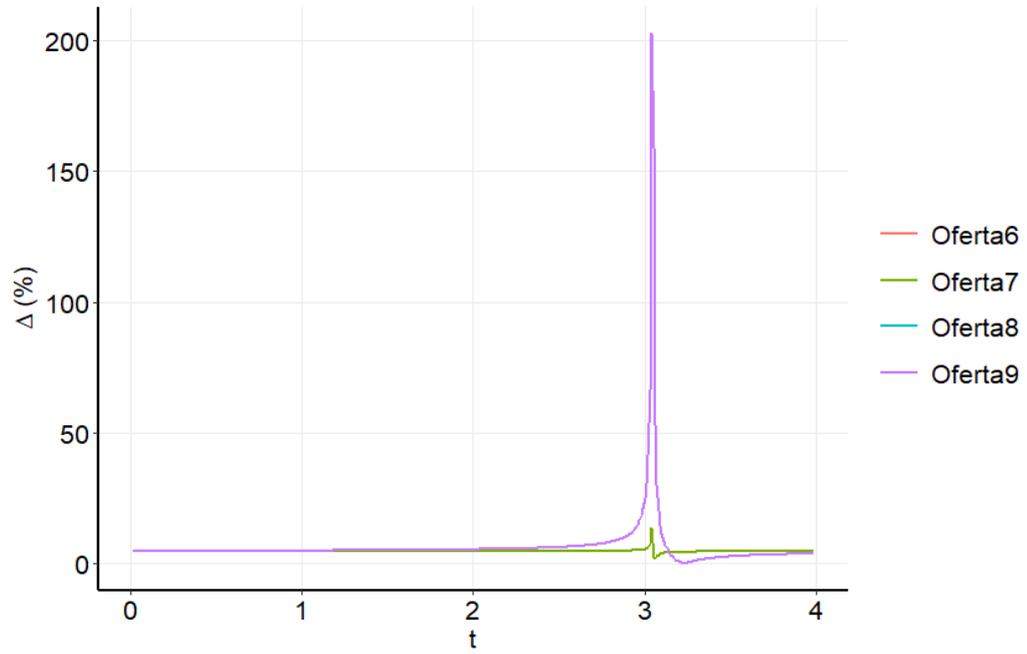


Fonte: Elaboração própria.

Figura 6.2 – Intervalo em que ocorre a inversão das curvas defuzzificadas para  $P(t)$ .



Fonte: Elaboração própria.

Figura 6.3 – Aproximação das diferenças percentuais de  $t$  entre 0 e 4, para  $S(t)$ .

Fonte: Elaboração própria.