UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

YURI TAVARES PINTO

SIMULAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E LÓGICA *FUZZY* NO ESTUDO DO MODELO DE RISCO COLETIVO

Varginha/MG

2019

YURI TAVARES PINTO

SIMULAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E LÓGICA *FUZZY* NO ESTUDO DO MODELO DE RISCO COLETIVO

Trabalho apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Economia pelo Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Alfenas.

Orientador: Leandro Ferreira

Varginha/MG

2019

RESUMO

Em precificação de seguros, o modelo de risco coletivo, que se baseia no estudo do sinistro agregado de uma carteira de apólices, pode ser utilizado no cálculo do prêmio para o segurado. Incertezas podem estar presentes nos parâmetros das distribuições de probabilidade que caracterizam os grupos de apólices, sendo que tais incertezas podem ser modeladas via conjuntos *fuzzy*. O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria dos conjuntos *fuzzy* e simulação de variáveis aleatórias no modelo de risco coletivo, considerando que o parâmetro da distribuição de probabilidade da variável aleatória "número de sinistros ocorridos" é incerto e modelado por um número *fuzzy*. Foi possível notar que quanto maior a incerteza relacionada ao parâmetro da distribuição de probabilidade, maior é a amplitude dos intervalos do sinistro agregado.

Sumário

1. Introdução

Em Ciências Atuariais, a simulação de variáveis aleatórias pode ser realizada para avaliar o comportamento do modelo de risco coletivo. O modelo de risco coletivo se baseia no estudo do sinistro agregado de uma carteira de apólices, sendo que tal modelo considera as variáveis aleatórias “número de sinistros ocorridos” e “valor do sinistro individual” (TSE, 2009).

Em precificação de seguros, o modelo de risco coletivo pode ser utilizado no cálculo do prêmio para o segurado. No caso, as seguradoras podem agrupar as apólices em grupos de segurados que apresentam características semelhantes, obtendo grupos de baixo, médio ou grande risco, de acordo com os parâmetros (parâmetros de risco) associados às distribuições de probabilidade referentes a cada grupo. Incertezas podem estar presentes nos parâmetros das distribuições de probabilidade que caracterizam os grupos de apólices, sendo que tais incertezas podem ser modeladas via lógica *fuzzy*. A lógica *fuzzy*, baseada na teoria dos conjuntos *fuzzy*, é uma ferramenta utilizada para modelar informações vagas, imprecisas e/ou ambíguas (Zadeh, 1965).

O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria dos conjuntos *fuzzy* e simulação de variáveis aleatórias no modelo de risco coletivo, considerando que o parâmetro da distribuição de probabilidade da variável aleatória “número de sinistros ocorridos” é incerto, modelado por um número *fuzzy*.

2. Revisão de Literatura

2.1. Conjuntos *fuzzy* e funções de pertinência

A lógica *fuzzy* foi apresentada inicialmente por Zadeh (1965) para complementar, e tentar explicar de uma maneira mais flexível do que a teoria da lógica clássica, situações de definições mais complexas envolvendo incertezas.

Segundo Barros e Bassanezi (2010), para chegar a um conceito do que seria um conjunto *fuzzy*, Zadeh partiu da conceituação de um conjunto para a lógica clássica, e da determinação de sua função característica, da seguinte forma:

Seja U um conjunto universo e A um subconjunto de U, a função característica de A é dada por:

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \in A \\ 0 \; se \; x \notin A \end{cases}.$$

Assim, x_A é uma função com domínio em U e imagem contida no conjunto $\{0,1\}$, ou seja, $x_A(x) = 1$ significa que x pertence ao subconjunto A, e se

$x_A(x) = 0$, x não é elemento de A. Desta forma, a lógica clássica consegue descrever completamente o conjunto A, no entanto, só admite os resultados verdadeiro ou falso, limitando as possibilidades de análise e classificação.

De forma semelhante, Zadeh definiu que, seja U um conjunto universo e A um subconjunto *fuzzy*, A é caracterizado por uma função de pertinência

$$\mu_A: U \to [0,1].$$

O valor obtido para $\mu_A(x) \in [0,1]$ indica o grau de pertinência do elemento x, ou seja, o quanto este x pertence ao subconjunto *fuzzy* A.

2.2. α-nível

Conforme Barros e Bassanezi (2010), para todo subconjunto *fuzzy* é possível associar uma série de conjuntos clássicos denominados de α-níveis. Um elemento x do subconjunto A pertence a determinado α-nível se seu grau de pertinência é maior que o valor $\alpha \in [0,1]$ que define este nível. Este conjunto clássico é denotado por $[A]^\alpha$, desta forma:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathrm{U}/\mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

2.3. Números *fuzzy*

Para Barros e Bassanezi (2010), pode-se dizer que os valores numéricos utilizados nas diversas áreas de estudo são apenas aproximações do valor real, e esta imprecisão pode ser gerada pelos instrumentos de medidas, pelo responsável pelas medições, dentre outros fatores. Os números *fuzzy* são então utilizados para representar matematicamente expressões como “em torno de” e “aproximadamente” determinado valor.

Um subconjunto *fuzzy* A é considerado um número *fuzzy* quando o conjunto universo de $\mu_A(x)$ é o conjunto dos números reais e satisfaz as seguintes condições:

I. A é um conjunto convexo;
II. Existe pelo menos um valor de x que resulte em pertinência máxima, ou seja, $\mu_A(x) = 1$;
III. $\mu_A(x)$ é contínua em determinado intervalo.

Existem diversos tipos de números *fuzzy*, cada um com sua função de pertinência e características do α-nível. Os números *fuzzy* mais comuns são os triangulares, trapezoidais e em forma de sino.

Seja A um número *fuzzy* triangular, sua função de pertinência é:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{u-a}, se\ a < x \le u; \\ \dfrac{b-x}{b-u}, se\ u < x \le b; \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$

Tendo como base o intervalo $[a, b]$, e $\mu_A(u) = 1$. Pode ser representado de maneira simplificada como $A = [a; u; b]$, e seus α-níveis dados pelo intervalo

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b], para\ todo\ \alpha \in [0,1].$$

Seja A um número *fuzzy* trapezoidal, sua função de pertinência é:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, se\ a \le x < b; \\ 1, \quad se\ b \le x \le c; \\ \dfrac{d-x}{d-c}, se\ c < x \le d; \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$

Os α-níveis de um número *fuzzy* trapezoidal são dados pelo intervalo

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d], para\ todo\ \alpha \in [0,1].$$

Um número *fuzzy* em forma de sino possui uma função de pertinência suave e simétrica. Esta função é dada por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \exp(-\left(\dfrac{x-u}{a})^2\right), se\ u - \delta \le x \le u + \delta; \\ 0, \qquad caso\ contrário. \end{cases}$$

Os α-níveis deste tipo de número *fuzzy* são dados pelo seguinte intervalo:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[\mathrm{u} - \sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}, \mathrm{u} + \sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}\right], se\ \alpha \ge \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2}; \\ [u-\delta, u+\delta], \qquad se\ \alpha < \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2}. \end{cases}$$

2.4. Operações com números *fuzzy*

Barros e Bassanezi (2010) dizem que podem ser realizadas operações aritméticas entre números *fuzzy*. Estas operações estão relacionadas a operações aritméticas intervalares e são casos particulares do princípio de extensão.

Seja λ um número real e, A e B intervalos fechados dados por

$$A = [a_1, a_2]\ e\ B = [b_1, b_2],$$

as operações aritméticas intervalares podem ser definidas da seguinte forma:

I. A soma entre A e B é o intervalo:
$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$
II. A diferença entre A e B é o intervalo:
$$A - B = [a_1 - b_1, a_2 - b_2].$$
III. A multiplicação de A por um escalar λ é o intervalo:
$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2], & se\ \lambda \geq 0; \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], & se\ \lambda < 0. \end{cases}$$
IV. A multiplicação de A por B é o intervalo:
$$A.B = [\min P, \max P],$$
em que $P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$.
V. A divisão de A por B, em que $0 \notin B$ é o intervalo:
$$\frac{A}{B} = [a_1, a_2].\left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right].$$

Teorema. Os α-níveis do conjunto *fuzzy* $A \otimes B$ são dados por

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha$$

Para todo $\alpha \in [0,1]$, sendo $\otimes$ qualquer uma das operações aritméticas mencionadas anteriormente.

2.5. Simulação de variáveis aleatórias

Peebles (2001) afirma que uma variável aleatória (v.a) é uma função real dos elementos de determinado espaço amostral. Dado um experimento definido no espaço amostral S, é associado um número real $X(s)$ para cada elemento s pertencente a S, e $X(s)$ é então chamada de variável aleatória. As variáveis aleatórias são uma forma muito eficiente para identificar as características de determinado evento e realizar estudos em torno deste.

Para Rizzo (2007), a simulação de variáveis aleatórias é uma das ferramentas fundamentais da estatística computacional. A simulação de variáveis aleatórias tem como finalidade gerar amostras aleatórias que possibilitem compreender e prever o comportamento de determinada variável ou evento. Existem aplicações dos métodos de geração de variáveis nas mais diversas áreas de estudo, desde a estatística aplicada e engenharias, até ciências sociais.

As variáveis aleatórias são um objeto de estudo muito amplo e flexível, consequentemente diversos métodos de simulação foram desenvolvidos. Para os fins deste trabalho será utilizado apenas o método da transformada inversa.

2.5.1. Método da transformada inversa

Segundo Raychaudhuri (2008), o método da transformada inversa é o método mais direto para a simulação de variáveis aleatórias. Neste método é utilizada a função inversa de uma função de distribuição acumulada e um valor gerado a partir da distribuição $Uniforme(0,1)$ para gerar a variável aleatória desejada.

Este é um método muito eficiente devido a sua simplicidade e a possibilidade de aplicá-lo em situações com funções discretas contínuas ou mistas. Por outro lado, caso a distribuição da variável aleatória que deseja-se simular seja desconhecida ou de difícil manipulação, o método da transformada inversa encontra algumas limitações.

2.5.1.1. Simulação de variáveis aleatórias contínuas

Rizzo (2007) baseia o método da transformada inversa para variáveis aleatórias contínuas no seguinte resultado:

Para Magalhães (2006), seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição acumulada $F(X)$, então $U = F(X)$ terá distribuição Uniforme contínua em [0,1]. Sendo $U \sim U_c[0,1]$, então $X = F^{-1}(U)$ terá função de distribuição F.

Demonstração: Se X é contínua, F é uma função contínua e o mesmo ocorre com $U = F(X)$. A função de distribuição de F será um número entre 0 e 1, assim, para $0 < y < 1$,

$$P(Y \geq y) = P(F(X) \geq y) = P\left(X \geq F^{-1}(y)\right) = 1 - P\left(X \leq F^{-1}(y)\right)$$
$$= 1 - F\left(F^{-1}(y)\right) = 1 - y$$

Como Y é contínua, segue $P(Y > y) = P(Y \geq y)$ e, dessa forma, Y terá distribuição Uniforme Contínua em [0,1].

Considerando a recíproca, se $U \sim Uniforme(0,1)$, e sua inversa é $X = F^{-1}(U)$, desta forma:

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P\left(U \leq F(x)\right) = F(x).$$

Assim, pode-se dizer que$F^{-1}(U)$ tem a mesma distribuição de X. Para simular a variável aleatória X basta gerar um valor da $Uniforme(0,1)$ e aplicá-lo na função inversa encontrada.

O método pode ser aplicado utilizado os seguintes passos:

I. Encontrar a função inversa $F_X^{-1}(u)$;
II. Computar a função encontrada;
III. Para cada simulação de X que deseja-se realizar:
   - Simular um valor para u da $Uniforme(0,1)$;
   - Encontrar o valor $X = F_X^{-1}(u)$.

Exemplo 1: Simular um valor de X, considerando que X seja uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (f.d.p)

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, se\ 0 < x < 1; \\ 0, \quad caso\ contrário. \end{cases}$$

Solução:

O primeiro passo é encontrar a função de distribuição acumulada (f.d.a) integrando a função densidade de probabilidade (f.d.p) dada,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 3x^2\, dx = \int_{0}^{x} 3x^2\, dx = [x^3]_0^x = x^3.$$

Em seguida encontrar a função inversa $X = F_X^{-1}(U)$:

$$F_X(x) = x^3,$$

$$u = x^3,$$

$$x = u^{\frac{1}{3}} = F_X^{-1}(u).$$

Assim,

$$X = F_X^{-1}(U) = U^{\frac{1}{3}},$$

com $U \sim Uniforme(0,1)$.

Algoritmo:

1. Gerar o valor de $U \sim Uniforme(0,1)$;
2. Gerar a inversa $F_X^{-1}(U) = u^{\frac{1}{3}}$;
3. Obter o valor simulado de X.

Exemplo 2: Simular um valor de X, considerando que X seja uma variável aleatória com função de distribuição acumulada

$$F(x) = 1 - \frac{1+\alpha}{1+\alpha e^{\frac{x}{\beta}}},\ \ x > 0,$$

em que α e β são parâmetros positivos.

Solução:

Como já temos a função de distribuição acumulada, basta encontrar $X = F^{-1}(U)$:

$$F(x) = 1 - \frac{1+\alpha}{1+\alpha e^{\frac{x}{\beta}}},$$

$$u = 1 - \frac{1+\alpha}{1+\alpha e^{\frac{x}{\beta}}},$$

$$(1-u).\left(1+\alpha e^{\frac{x}{\beta}}\right) = 1+\alpha,$$

$$\left(1+\alpha e^{\frac{x}{\beta}}\right) = \frac{1+\alpha}{1-u},$$

$$\alpha e^{\frac{x}{\beta}} = \frac{1+\alpha}{1-u} - 1,$$

$$e^{\frac{x}{\beta}} = \frac{\alpha+u}{1-u}.\frac{1}{\alpha},$$

$$x = \beta.ln\left(\frac{\alpha+u}{1-u}.\frac{1}{\alpha}\right) = F^{-1}(u).$$

Algoritmo:

1. Gerar o valor de $U\sim Uniforme(0,1)$;
2. Gerar a inversa $F^{-1}(U) = \beta.ln\left(\frac{\alpha+u}{1-u}.\frac{1}{\alpha}\right)$;
3. Obter o valor simulado de X.

2.5.1.2. Simulação de variáveis aleatórias discretas

Rizzo (2007) diz que o método da transformada inversa pode ser aplicado em casos discretos da seguinte forma:

Se X é uma variável aleatória discreta e

$$\ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots$$

são os pontos de descontinuidade de $F_X(x)$, então a transformação inversa é dada por $F_X^{-1}(u) = x_i$, em que $F_X(x_{i-1}) < u \leq F_X(x_i)$.

Para realizar uma simulação por este método deve-se:

I. Gerar um valor de $U\sim Uniforme(0,1)$;
II. Encontrar o x_i em que $F_X(x_{i-1}) < u \leq F_X(x_i)$.

Exemplo 3: Simular um valor para a variável aleatória X com a seguinte distribuição de probabilidade discreta:

$$x = \begin{cases} -1, & p_0 = 0{,}25; \\ 2, & p_1 = 0{,}35; \\ 7, & p_2 = 0{,}17; \\ 12, & p_3 = 0{,}23. \end{cases}$$

Solução:

Primeiramente deve-se calcular a distribuição acumulada, $X = g(u)$, que de forma geral é dada por:

$$X = g(u) = \begin{cases} x_0, & se\ u < p_0; \\ x_1, & se\ p_0 \leq u < p_0 + p_1; \\ x_2, & se\ p_0 + p_1 \leq u < p_0 + p_1 + p_2; \\ \vdots & \vdots \\ x_i, & se\ \sum_{k=0}^{i-1} p_k \leq u < \sum_{k=0}^{i} p_k. \end{cases}$$

Desta forma:

$$X = g(u) = \begin{cases} -1, & se\ u < 0{,}25; \\ 2, & se\ 0{,}25 \leq u < 0{,}6; \\ 7, & se\ 0{,}6 \leq u < 0{,}77; \\ 12, & se\ 0{,}77 \leq u < 1. \end{cases}$$

Em seguida basta simular um valor para $U \sim Uniforme(0{,}1)$, identificar o intervalo em que u gerado está localizado, e o x relacionado a este intervalo.

Algoritmo:

1. Gerar o valor de $U \sim Uniforme(0{,}1)$;
2. Encontrar a acumulada $F_X(x)$;
3. Encontrar o x_i em que $F_X(x_{i-1}) < u \leq F_X(x_i)$.

Exemplo 4: Utilizando o método da transformada inversa, encontrar os valores de N para os valores dados de $U = (0{,}232; 0{,}494;\ 0{,}960)$ de uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 1{,}7$.

Solução:

Conhecendo a distribuição de probabilidade $N \sim Poisson(1{,}7)$ com $f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^n}{n!}$, pode-se construir sua acumulada e os intervalos para determinação do valor de X. Obtem-se então a acumulada:

$$N = g(U) = \begin{cases} 0, & se\ u < 0{,}183; \\ 1, & se\ 0{,}183 \leq u < 0{,}493; \\ 2, & se\ 0{,}483 \leq u < 0{,}757; \\ 3, & se\ 0{,}757 \leq u < 0{,}907; \\ 4, & se\ 0{,}907 \leq u < 0{,}970; \\ \vdots & \qquad \vdots \end{cases}$$

Assim, temos que:

$0{,}183 \leq 0{,}232 < 0{,}493$, então $n_1 = 1$;

$0{,}483 \leq 0{,}494 < 0{,}757$, então $n_2 = 2$;

$0{,}907 \leq 0{,}960 < 0{,}970$, então $n_3 = 4$.

Algoritmo:

1. Encontrar a acumulada $F(n)$;
2. Encontrar o n_i em que $F(n_{i-1}) < u \leq F(n_i)$.

2.6. Modelo de risco coletivo

Tse (2009) afirma que o sinistro agregado de uma carteira de apólices é equivalente a soma de todos os sinistros individuais desta carteira, e este pode ser calculado pelo modelo de risco coletivo.

Segundo Tse (2009), assume-se que o sinistro agregado S segue uma distribuição composta. Assim, seja N o número de sinistros ocorridos em uma determinada carteira e seja X_i o valor do sinistro referente a i-ésima ocorrência (sinistro individual), então o sinistro agregado S será dado por:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Neste modelo, assume-se que X_1, X_2,...,X_N sejam independentes e identicamente distribuídas e que N e X são independentes.

3. Metodologia

Inicialmente, foi realizada a simulação de uma variável aleatória contínua, sendo que o parâmetro da distribuição é incerto, representado por um número *fuzzy* (simulação 1). Em seguida, avaliou-se o comportamento do modelo de risco coletivo, considerando que o parâmetro da distribuição da variável aleatória “número de sinistros ocorridos” é incerto, representado por um número *fuzzy* (simulação 2).

3.1. Simulação 1

Nesta etapa, foi realizada a simulação de uma variável aleatória X que segue uma distribuição exponencial, em que o parâmetro θ desta distribuição é o número *fuzzy* triangular $\tilde{\theta} = [a; \mu; b]$. Assim, foi observado o comportamento desta distribuição para diferentes α-níveis do número *fuzzy* triangular $\tilde{\theta}$.

Considerando X uma variável aleatória com distribuição exponencial, ou seja, $X \sim Exponencial(\theta)$, sabe-se que a função de distribuição acumulada de X é:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\theta x}.$$

Pelo método da transformada inversa, tem-se que:

$$F_X(x) = u = 1 - e^{-\theta x};$$

$$e^{-\theta x} = (1 - u);$$
$$-\theta x = ln(1 - u);$$

$$x = \frac{-ln(1 - u)}{\theta}.$$

Para uma sequência de valores de u, sendo que $u \in [0,1]$, foram encontrados os valores correspondentes de X. Após serem obtidos os valores de X, pode-se observar o comportamento da função de distribuição acumulada para diferentes α-níveis de $\tilde{\theta}$, aqui representados por $\tilde{\theta}^{\alpha} = [\tilde{\theta}^{\alpha}_{inf}, \tilde{\theta}^{\alpha}_{sup}]$, em que $\tilde{\theta}^{\alpha}_{inf}$ representa o limite inferior e $\tilde{\theta}^{\alpha}_{sup}$ representa o limite superior de $\tilde{\theta}^{\alpha}$. Assim, com base em tais limites, foram observados os comportamentos das funções de distribuição acumuladas $F_X(x)^{\alpha}_{inf}$ e $F_X(x)^{\alpha}_{sup}$. A seguir, são apresentados os algoritmos para obter $F_X(x)^{\alpha}_{inf}$ e $F_X(x)^{\alpha}_{sup}$.

Algoritmo para obter $\boldsymbol{F_X(x)^{\alpha}_{inf}}$:

1. Definir um número *fuzzy* triangular $\tilde{\theta} = [a; \mu; b]$;
2. Definir uma sequência de valores de $u \in [0,1]$;
3. Encontrar uma sequência de valores de x, sendo

$$x = \frac{-ln(1 - u)}{\mu};$$

4. Escolher o valor de α;
5. Encontrar $\tilde{\theta}^{\alpha}_{inf} = (\mu - a)\alpha + a$;
6. Para cada valor de x, obter $F_X(x)^{\alpha}_{inf} = 1 - e^{-\tilde{\theta}^{\alpha}_{inf} x}$.

Algoritmo para obter $F_X(x)^{\alpha}_{sup}$:

1. Definir um número *fuzzy* triangular $\tilde{\theta} = [a; \mu; b]$;
2. Definir uma sequência de valores de $u \in [0,1]$;
3. Encontrar uma sequência de valores de x, sendo

$$x = \frac{-ln(1-u)}{\mu};$$

4. Escolher o valor de α;
5. Encontrar $\tilde{\theta}^{\alpha}_{sup} = -(b-\mu)\alpha + b$;
6. Para cada valor de x, obter $F_X(x)^{\alpha}_{sup} \; = 1 - e^{-\tilde{\theta}^{\alpha}_{sup} x}$.

3.2. Simulação 2

Nesta etapa, foi realizado o estudo do modelo de risco coletivo. Seja N o número de ocorrências de sinistros de uma determinada carteira e seja X_i a sinistralidade da i-ésima ocorrência, então o sinistro agregado S será dado por:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Primeiramente, obteve-se um valor para a variável aleatória N de acordo com uma distribuição de Poisson com parâmetro λ. O parâmetro λ desta distribuição foi considerado como um número *fuzzy* triangular $\tilde{\lambda} = [a, \mu, b]$. Com base nos valores simulados de N, foram obtidos N valores de X que seguem distribuição gama com parâmetros α e β, ou seja, $X \sim Gama(\gamma, \beta)$. Considerando os diferentes α-níveis de $\tilde{\lambda}$, aqui representados por $\tilde{\lambda}^{\alpha} = [\tilde{\lambda}^{\alpha}_{inf}, \tilde{\lambda}^{\alpha}_{sup}]$, em que $\tilde{\lambda}^{\alpha}_{inf}$ representa o limite inferior e $\tilde{\lambda}^{\alpha}_{sup}$ representa o limite superior de $\tilde{\lambda}^{\alpha}$, foram observados os comportamentos dos sinistros agregados S^{α}_{inf}e S^{α}_{sup}. A seguir, são apresentados os algoritmos para obter amostras de S^{α}_{inf}e S^{α}_{sup}.

Algoritmo para obter uma amostra de S^{α}_{inf}:

1. Definir um número *fuzzy* triangular $\tilde{\lambda} = [a; \mu; b]$;
2. Escolher o valor de α;
3. Encontrar $\tilde{\lambda}^{\alpha}_{inf} = (\mu - a)\alpha + a$;
4. Simular um valor de N, sabendo que $N \sim Poisson(\tilde{\lambda}^{\alpha}_{inf})$;
5. Simular N valores de X, sabendo que $X \sim Gama(\gamma, \beta)$;
6. Encontrar

$$S^{\alpha}_{inf} = \sum_{i=1}^{N} X_i\,;$$

7. Repetir os passos anteriores M vezes para obter uma amostra de S^{α}_{inf}.

Algoritmo para obter uma amostra de S_{sup}^{α}:

1. Definir um número *fuzzy* triangular $\tilde{\lambda} = [a; \mu; b]$;
2. Escolher o valor de α;
3. Encontrar $\tilde{\lambda}_{sup}^{\alpha} = -(b - \mu)\alpha + b$;
4. Simular um valor de N, sabendo que $N \sim Poisson(\tilde{\lambda}_{sup}^{\alpha})$;
5. Simular N valores de X, sabendo que $X \sim Gama(\gamma, \beta)$;
6. Encontrar

$$S_{sup}^{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} X_i \,;$$

7. Repetir os passos anteriores M vezes para obter uma amostra de S_{sup}^{α}.

4. Resultados e discussão

4.1. Simulação 1

Considerando o número *fuzzy* triangular $\tilde{\theta} = [0.4; 0.5; 0.6]$, para $\alpha = 1{,}0$, tem-se o α-nível com pertinência máxima, em que os limites $\tilde{\theta}_{inf}^{1,0}$ e $\tilde{\theta}_{sup}^{1,0}$ são iguais, assim como as funções de distribuição acumuladas $F_X(x)_{inf}^{1,0}$ e $F_X(x)_{sup}^{1,0}$. Dessa maneira, para $\alpha = 1{,}0$, tem-se o caso clássico, sendo que $\theta_{inf}^{1,0} = \theta_{sup}^{1,0} = \mu = 0{,}5$.

Considerando $\alpha = 0{,}6$, tem-se que $\tilde{\theta}_{inf}^{0,6} = 0{,}46$ e $\tilde{\theta}_{sup}^{0,6} = 0{,}54$. Para $\alpha = 0{,}2$, tem-se que $\tilde{\theta}_{inf}^{0,2} = 0{,}42$ e $\tilde{\theta}_{sup}^{0,2} = 0{,}58$. A Figura 1 apresenta as funções de distribuição acumuladas $F_X(x)_{inf}^{\alpha}$ e $F_X(x)_{sup}^{\alpha}$ para α-níveis iguais a 0,2, 0,6 e $1{,}0$. Como por exemplo, para $x = 4$ e $\alpha = 0{,}2$, tem-se que $F_X(4)_{inf}^{0,2} = 0{,}81$ e $F_X(4)_{sup}^{0,2} = 0{,}90$. Para $x = 4$ e $\alpha = 1{,}0$ (caso clássico), tem-se que $F_X(4)_{inf}^{1,0} = F_X(4)_{sup}^{1,0} = 0{,}86$. É possível notar que a maior amplitude dos valores das funções de distribuição acumuladas ocorre com a redução do α-nível, ou seja, quanto maior a incerteza sobre θ, maior será esta amplitude.

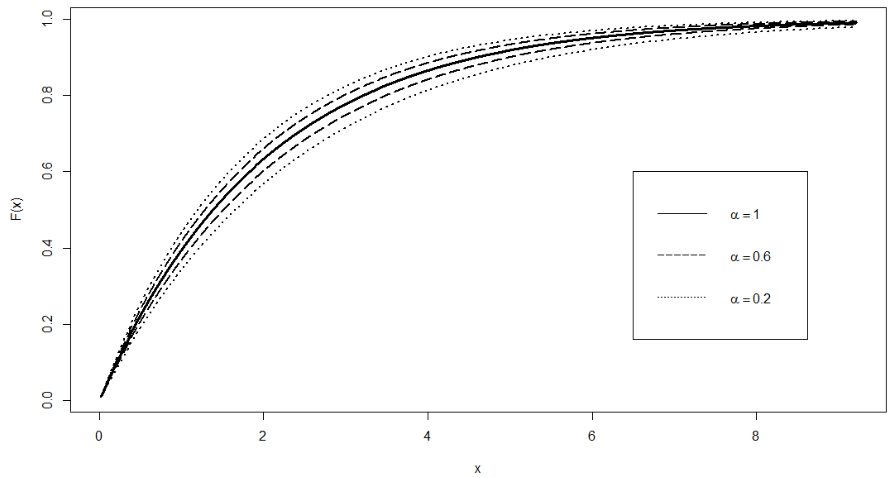

Figura 1. Funções de distribuição acumuladas $F_X(x)_{inf}^{\alpha}$ e $F_X(x)_{sup}^{\alpha}$, para $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}6$ e $\alpha = 1{,}0$.
Fonte: Elaboração própria.

4.2. Simulação 2

Para a análise do modelo de risco coletivo, foi considerado que a variável aleatória N segue uma distribuição de Poisson com parâmetro λ, sendo que λ é representado pelo número *fuzzy* triangular $\tilde{\lambda} = [4; 5; 6]$. Também foi considerado que X segue uma distribuição gama com parâmetros $\alpha = 100$ e $\beta = 0{,}02$.

De acordo com diferentes valores de α-níveis e $\tilde{\lambda}^{\alpha} = [\lambda_{inf}^{\alpha}, \lambda_{sup}^{\alpha}]$, a Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para os 10000 valores simulados de S, onde M1 e M2 representam as médias referentes a S_{inf}^{α} e S_{sup}^{α}, respectivamente. Na Tabela 1 também são apresentadas as diferenças entre M2 e M1 (DIF). Pode-se notar que as DIFs diminuem com o aumento do valor do α-nível, ou seja, quanto menor a incerteza sobre λ, menor a diferença entre M2 e M1. Os valores de M1 e M2 não são iguais para $\alpha = 1{,}0$ (caso clássico) devido as simulações realizadas para S.

Tabela 1. Resultados obtidos para as médias dos valores simulados de S.

α-nível	λ_{inf}^{α}	λ_{sup}^{α}	M1	M2	DIF
0,1	4,1	5,9	20383,50	29728,36	9344,86
0,3	4,3	5,7	21473,10	28529,45	7056,35
0,7	4,7	5,3	23400,69	26606,31	3205,62
1,0	5,0	5,0	24906,60	25019,59	112,99

Fonte: Elaboração própria.

A Figura 2 apresenta os histogramas relacionados a S_{inf}^{α} e S_{sup}^{α} para α-níveis iguais a $0{,}1$, $0{,}3$, $0{,}7$ e $1{,}0$. Pode-se observar que os histogramas de $S_{inf}^{1,0}$ e $S_{sup}^{1,0}$ são quase idênticos, pois não existe incerteza quanto a λ.

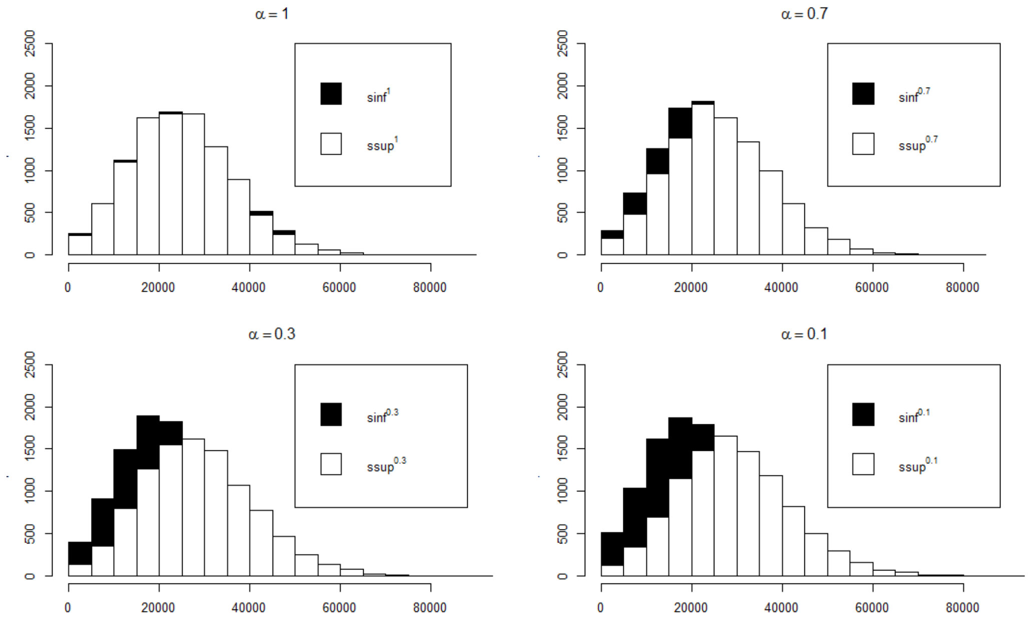

Figura 2. Histogramas relacionados a S_{inf}^{α} e S_{sup}^{α} para $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}7$ e $\alpha = 1{,}0$.
Fonte: Elaboração própria.

5. Considerações finais

O presente trabalho buscou apresentar uma aplicação da teoria dos conjuntos *fuzzy* e simulação de variáveis aleatórias no modelo de risco coletivo. Para tanto, o parâmetro da distribuição de probabilidade da variável aleatória "número de sinistros ocorridos" foi considerado incerto, modelado por um número *fuzzy*. A proposta consiste em uma alternativa viável para o tratamento de incertezas quanto a definição da distribuição de probabilidade para um parâmetro de risco, resultando numa análise mais completa devido aos níveis de incertezas que podem ser adotados. Foi possível notar que quanto maior a incerteza relacionada ao parâmetro da distribuição de probabilidade, maior é a amplitude dos intervalos do sinistro agregado.

A aplicação da lógica *fuzzy* possibilita diferentes interpretações e perspectivas do modelo de risco coletivo. Por meio desta ferramenta, uma seguradora pode tomar diferentes estratégias no momento da precificação, buscando maior segurança financeira, ou até mesmo oferecendo produtos mais atrativos para o segurado.

Referências Bibliográficas

CARVALHO, André Luiz da Silva. **Precificação de um seguro de vida individual a partir do teste de lucratividade:** análise teórica e prática. 2017.

BARROS, Laécio Carvalho; BASSANEZI, Rodney Carlos. **Tópicos de lógica *fuzzy* e biomatemática**. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. Edusp, 2006.

PEEBLES, Peyton Z. **Probability, random variables, and random signal principles**. New York: McGraw-Hill, 2001.

RAYCHAUDHURI, Samik. **Introduction to monte carlo simulation**. In: 2008 Winter simulation conference. IEEE, 2008. p. 91-100.

RIZZO, Maria L. **Statistical computing with R**. Chapman and Hall/CRC, 2007.

TSE, Yiu-Kuen. **Nonlife actuarial models: theory, methods and evaluation**. Cambridge University Press, 2009.

ZADEH, Lotfi A. ***Fuzzy* sets**. Information and control, v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965.